| Name | | Matrikel | | | | | | | | SKZ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

# Klausur 1

## Berechenbarkeit und Komplexität

25. November 2011

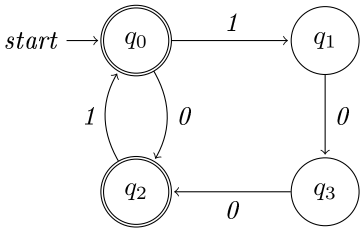
Markieren Sie die jeweils richtige Antwort. – *Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** $\boxed{\textit{DEA2011}}$

*Sei $N$ der nichtdeterministische endliche Automat*

$$(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, \nu, \{q_0\}, \{q_0, q_2\}),$$

*dessen Überführungsfunktion $\nu$ wie folgt gegeben ist.*




**1** ja *Gilt* $01010 \in L(N)$*?*

Folge den Zuständen $q_0, q_2, q_0, q_2, q_0, q_2$.

**2** ja *Gilt* $01100 \in L(N)$*?*

Folge den Zuständen $q_0, q_2, q_0, q_1, q_3, q_2$.

**3** ja *Ist* $\overline{L(N)}$ *regulär?*

**4** ja *Ist* $L(N) = L(r)$ *für den regulären Ausdruck* $r = ((\varepsilon + 10)01)^*(\varepsilon + 0 + 100)$*?*

**5** ja *Ist* $L(N)$ *rekursiv?*

**6** ja *Gibt es einen deterministischen endlichen Automaten $M$, so dass $L(M) = L(N)$?*

**7** ja *Kann $L(N)$ durch eine (deterministische) Turingmaschine $T$ generiert werden, d.h. existiert eine Turingmaschine $T$ mit $G(T) = L(N)$?*

**Aufgabe 2** $\boxed{\textit{Pumping}}$

*Sei* $L = \{\, 0^k 0^k 1^m \mid k, m \in \mathbb{N} \,\}$.

**8** ja *Gibt es einen regulären Ausdruck $r$, so daß $L(r) = L$?*

$r = (00)^* 1^*$

**9** ja *Gibt es einen nichtdeterministischen endlichen Automaten, dessen akzeptierte Sprache $L$ ist?*

**10** ja *Gibt es eine RAM, deren akzeptierte Sprache $L$ ist?*

**Aufgabe 3** $\boxed{\textit{RecursiveEnumerable3}}$

*Es seien*

$L_1 = \{\, 0^k 0^k 1^m \mid k, m \in \mathbb{N} \,\}$,

$L_2 = \{\, 0^{2k} 1^m \mid k, m \in \mathbb{N},\ m < 2011 \,\}$,

$L_3 = \{\, 0^k 1^m \mid k, m \in \mathbb{N},\ k < m \,\}$,

$L_4 = \{\, 0^{2k} 1^k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$,

| **11** | ja | |
|---|---|---|

*Ist $L_1 \setminus L_2$ regulär?*

$L_1$ und $L_2$ sind regulär. Eine Mengendifferenz führt nicht aus der Klasse regulärer Mengen heraus.

| **12** | ja | |
|---|---|---|

*Ist $L_2 \cap L_3$ endlich?*

$L_2 \cap L_3 = \left\{ 0^{2k}1^m \,\middle|\, k, m \in \mathbb{N},\, 2k < m < 2011 \right\}$ ist natürlich endlich.

| **13** | ja | |
|---|---|---|

*Ist $L_3 \circ L_4$ rekursiv?*

$L_3 \circ L_4 = \left\{ 0^k 1^m 0^{2n} 1^n \,\middle|\, m, n, k \in \mathbb{N},\, k < m \right\}$. Man kann leicht eine Turingmaschine $M$ angeben, so dass $L(M) = L_3 \circ L_4$.

| **14** | ja | |
|---|---|---|

*Existiert eine nicht-reguläre Sprache $L_5$ über dem Alphabet $\{0,1\}$, so dass $L_4 \cup L_5$ regulär ist?*

Natürlich. Nämlich etwa $L_5 := \{0,1\}^* \setminus L_4$. Diese Sprach $L_5$ ist tatsächlich nicht-regulär. Wäre sie es, dann wäre auch $L_4$ regulär, was aber nicht der Fall ist.

**Aufgabe 4** $\boxed{TM1a}$

*Gegeben ist die Turing-Maschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, dem Eingabealphabet $\Sigma = \{0,1\}$, dem Bandalphabet $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$ und den Endzuständen $F = \{q_2\}$. Die Überführungsfunktion*

$$\delta : Q \times \Gamma \xrightarrow{\text{partiell}} Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$$

*ist durch folgende Tabelle gegeben:*

| $\delta$ | $0$ | $1$ | $\sqcup$ |
|---|---|---|---|
| $q_0$ | $(q_1, 1, R)$ | $(q_1, 1, R)$ | $(q_2, \sqcup, R)$ |
| $q_1$ | $(q_0, 0, L)$ | $(q_0, 1, R)$ | $-$ |
| $q_2$ | $-$ | $-$ | $-$ |

*Weiterhin sei $M' = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta')$, wobei $\delta'$ (nahezu) identisch mit $\delta$ ist bis auf die Ausnahme, dass $\delta'(q_1, 0)$ nicht definiert ist, d. h. $\delta'$ ist gegeben durch die folgende Tabelle.*

| $\delta$ | $0$ | $1$ | $\sqcup$ |
|---|---|---|---|
| $q_0$ | $(q_1, 1, R)$ | $(q_1, 1, R)$ | $(q_2, \sqcup, R)$ |
| $q_1$ | $-$ | $(q_0, 1, R)$ | $-$ |
| $q_2$ | $-$ | $-$ | $-$ |

| 15 | | nein |
|---|---|---|

*Ist $q_0011 \vdash 0q_111 \vdash 01q_01 \vdash 011q_1\sqcup \vdash 011q_2\sqcup$ eine Berechnung von $M$?*

$q_0011 \vdash 0q_111$ gilt nicht.

| 16 | | nein |
|---|---|---|

*Ist $10 \in L(M)$?*

Wenn die 0 gelesen wird gehen wir einen Schritt nach links und beginnen von vorn. Die Maschine gerät in eine Endlosschleife.

| 17 | ja | |
|---|---|---|

*Ist $L(M)$ eine rekursive Sprache?*

$L(M) = L(((0+1)1)^*)$ und damit sogar regulär.

| 18 | ja | |
|---|---|---|

*Gibt es ein Eingabewort in $\Sigma^*$, auf dem $M$ nicht hält?*

Ja, etwa 10.

| 19 | | nein |
|---|---|---|

*Ist $10 \in L(M')$?*

| 20 | | nein |
|---|---|---|

*Gibt es ein Eingabewort in $\Sigma^*$, auf dem $M'$ nicht hält?*

An jeder definierten Stelle bewegt die Maschine den Kopf nach rechts. Sie muss also irgendwann auf ein Leerzeichen treffen. Dann geht sie entweder in den akzeptierenden Zustand $q_2$ oder sie hält in $q_1$.

**Aufgabe 5** *Computable2011*

| 21 | ja | |
|---|---|---|

*Für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ bezeichnen mit $p_n$ die $n$-te Nachkommastelle in der Binärdarstellung von $\pi$. Ist die Funktion $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit*

$$\varphi(n) = \begin{cases} p_n & \textit{falls } n > 0 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

*von einer RAM berechenbar?*

| 22 | ja | |
|---|---|---|

*Sei $\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ und*

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

*Gibt es eine Turingmaschine mit Eingabealphabet $\Sigma$, die für jede Eingabe hält und die, bei Eingabe einer natürlichen Zahl $n > 0$, die ersten $n$ Nachkommastellen in der Dezimaldarstellung von $e$ aufs Band schreibt? Die Eingabe $n$ sei dabei als Dezimaldarstellung von $n$ auf dem Band gegeben.*

| 23 | | nein |
|---|---|---|

*Gibt es eine Turing-berechenbare Funktion, die nicht von einer RAM berechnet werden kann?*

**Aufgabe 6** *OpenNEA2011*

*((2 Punkte))*

*Sei $r = \varepsilon + (0+1)^*100^*$ ein regulärer Ausdruck. Geben Sie einen nichtdeterministischen Automaten $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ mit maximal 4 Zuständen explizit an, so daß $L(N) = L(r)$ gilt. Geben Sie die Überführungsfunktion möglichst als Graph an.*

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$
$$\Sigma = \{0, 1\}$$
$$S = \{q_0\}$$
$$F = \{q_3\}$$