Einführung der Methode der Gröbner Basen

Wolfgang Windsteiger
RISC Linz

Motivation aus der Biologie

Theorie der Gröbner Basen

Ein Algorithmus zum Berechnen von Gröbner Basen (GB)

Verbesserungen im GB-Algorithmus

Beispiele aus der Biologie

Motivation aus der Biologie

- System-Biologie beschäftigt sich mit *Vorhersage und Modifikation biologischer Netzwerke*
- Notwendig für Simulation des Verhaltens ist eine mathematische Modellierung: kontinuierlich ⟶ ODEs
- Diskrete Modellierung biologischer Systeme (Netzwerke) ⟶ führt oft auf *polynomiale dynamische Systeme*
  - *polynomiale Funktionen in mehreren Variablen* beschreiben das Verhalten des Systems
  - *polynomiale Gleichungen in mehreren Variablen* müssen beherrschbar sein (z.B. bei Reverse Engineering)
- Design von Medikamenten ⟶ Bestimmte Atome sollen an bestimmten Positionen in einem Molekül sein ⟶ "inverse Kinematik" analog zu Robotik ⟶ *Polynomiale Gleichungssysteme*
- Algebraische Statistik ⟶ *Polynomiale Gleichungssysteme*
- Bestimmung stabiler Positionen von Proteinen in Zellmembranen ⟶ *Polynomiale Gleichungssysteme*
- Analyse biochemischer Reaktions-Netzwerke ⟶ *Polynomiale Gleichungssysteme*
- Analyse von Impfstoff-Wirksamkeit ⟶ Anstelle numerischer Approximation können Formeln ermittelt werden ⟶ *Eliminationstheorie mit Gröbner Basen*

Beispiele

Bestimmung stabiler Positionen von Proteinen in Zellmembranen

- Führt auf Gleichungssysteme der Form

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{1}{(z_i - z_j)^2} == 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, N$$

— Gesucht sind Lösungen für z_i.

Analyse Biochemischer Reaktions-Netzwerke

- Führt auf Gleichungssysteme der Form

$$\begin{aligned}
&\mathrm{k1}\, e\, A - \mathrm{k2}\,\mathrm{EA} - (\mathrm{k3}\,\mathrm{EA}\, B - \mathrm{k4}\,\mathrm{EAB}) == 0,\\
&\mathrm{k3}\,\mathrm{EA}\, B - \mathrm{k4}\,\mathrm{EAB} - (\mathrm{k5}\,\mathrm{EAB} - \mathrm{k6}\,\mathrm{EPQ}) == 0,\\
&\mathrm{k5}\,\mathrm{EAB} - \mathrm{k6}\,\mathrm{EPQ} - (\mathrm{k7}\,\mathrm{EPQ} - \mathrm{k8}\,\mathrm{EP}\, Q) == 0,\\
&\mathrm{k7}\,\mathrm{EPQ} - \mathrm{k8}\,\mathrm{EP}\, Q - (\mathrm{k9}\,\mathrm{EP} - \mathrm{k10}\, e) == 0,\\
&v - (\mathrm{k9}\,\mathrm{EP} - \mathrm{k10}\, e) == 0,\\
&e + \mathrm{EA} + \mathrm{EAB} + \mathrm{EPQ} + \mathrm{EP} - \mathrm{E0} == 0
\end{aligned}$$

— Gesucht ist v in Abhängigkeit von e, EA, EAB, EPQ, EP.

Formeln für Impfstoff-Wirksamkeit: Zusammenhänge der Form

- Zusammenhänge bekannt in der Form

$$\begin{aligned}
&a_7 == n\, v\, q_1\, q_2\, q_3 + n\,(1-v)\, e_1\, e_2\, e_3,\\
&a_6 == n\, v\, q_1\, q_2\,(1-q_3) + n\,(1-v)\, e_1\, e_2\,(1-e_3),\\
&a_5 == n\, v\, q_1\,(1-q_2)\, q_3 + n\,(1-v)\, e_1\,(1-e_2)\, e_3,\\
&a_4 == n\, v\, q_1\,(1-q_2)\,(1-q_3) + n\,(1-v)\, e_1\,(1-e_2)\,(1-e_3),\\
&a_3 == n\, v\,(1-q_1)\, q_2\, q_3 + n\,(1-v)\,(1-e_1)\, e_2\, e_3,\\
&a_2 == n\, v\,(1-q_1)\, q_2\,(1-q_3) + n\,(1-v)\,(1-e_1)\, e_2\,(1-e_3),\\
&a_1 == n\, v\,(1-q_1)\,(1-q_2)\, q_3 + n\,(1-v)\,(1-e_1)\,(1-e_2)\, e_3,\\
&a_0 == n\, v\,(1-q_1)\,(1-q_2)\,(1-q_3) + n\,(1-v)\,(1-e_1)\,(1-e_2)\,(1-e_3)
\end{aligned}$$

— Gesucht: Formel für v in Abhängigkeit von a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7.

Theorie der Gröbner Basen

- Gröbner Basen: *die zentrale algorithmische Methode* in *algorithmischer Polynom-Idealtheory* (kommutative Algebra, Algebraische Geometrie).

  — Eingeführt von Bruno Buchberger in seiner Diss 1965.

  — Weiterentwickelt von ihm selbst in den 1970ern

  — Seit 1980ern: Breite Entwicklung der Theorie, Verallgemeinerungen und Anwendungen in den verschiedensten Bereichen durch verschiedenste Autoren.

Theorie der Gröbner Basen

- Gröbner Basen: die zentrale algorithmische Methode in algorithmischer Polynom-Idealtheory (kommutative Algebra, Algebraische Geometrie).

- Gröbner Basen: können für *beliebige endliche Mengen von multivariaten Polynomen* auch tatsächlich *berechnet* werden.

  — Begriffe wie "Ideal Basis" u.ä existierten schon früher, aber Buchberger entwickelte den *ersten Algorithmus* zum Berechnen einer GB im Jahr 1965.

  — Originalalgorithmus in *verschiedenster Weise verbessert ("sugar cube strategy", "Gröbner walk", FGLM, etc.)*, aber die meisten Verbesserungen beruhen immer noch am Original-Algorithmus aus 1965.

  — Heute: zahlreiche Implementierungen z.B. in *Mathematica*, MAPLE, Singular, MAGMA, TI-92 (!), etc.

```
GroebnerBasis[{3 x^4 + 2 x y^2 + y^3, x^2 y - 5 x y + 2 x^3}, {x, y}]
```

$$\{5625 y^4 + 1340 y^5 + 150 y^6 + 3 y^7,\ 23709375 x y^2 - 623560 y^4 - 369975 y^5 - 8952 y^6,$$
$$355640625 x^2 y + 47418750 y^3 - 10774085 y^4 - 1134600 y^5 - 20532 y^6,$$
$$711281250 x^3 - 1778203125 x y - 47418750 y^3 + 10774085 y^4 + 1134600 y^5 + 20532 y^6\}$$

Theorie der Gröbner Basen

- Gröbner Basen: können für beliebige endliche Mengen von multivariaten Polynomen auch tatsächlich berechnet werden.

- Gröbner Basen: erlauben oft *einfache Antworten* auf Fragen im Zusammenhang mit Mengen von *multivari–aten Polynomen* (durch Transformation der Menge in eine Gröbner Basis).

2 Beispiele

Polynomiale (Algebraische) Gleichungssysteme

- Aus der obigen GB können wir sofort ablesen, dass das System

$$3x^4 + 2xy^2 + y^3 = 0$$

$$x^2 y - 5xy + 2x^3 = 0$$

— *Lösungen hat*

— nur *endlich viele* Lösungen hat

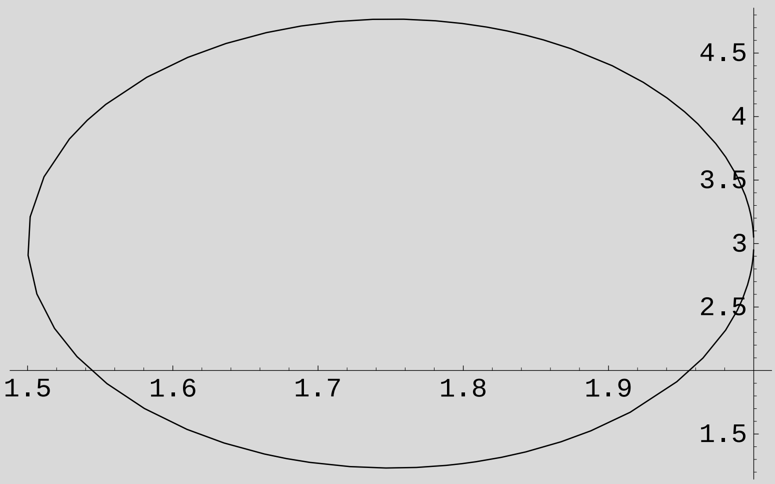
Algebraische Geometrie

- Betrachten wir die parametrischer Form einer 2D-curve

$$x = \frac{2t^2 + 4t + 5}{t^2 + 2t + 3}$$

$$y = \frac{3t^2 + t + 4}{t^2 + 2t + 3}.$$

```
ParametricPlot[{(2t^2 + 4t + 5)/(t^2 + 2t + 3), (3t^2 + t + 4)/(t^2 + 2t + 3)}, {t, -100, 100}, PlotPoints -> 50];
```



— Gesucht ist eine implizite Darstellung der Kurve durch eine Gleichung (allgemein nennen wir diese Problemstellung die *Implizitisierung* eines geometrischen Objeks). Dafür berechnen wir

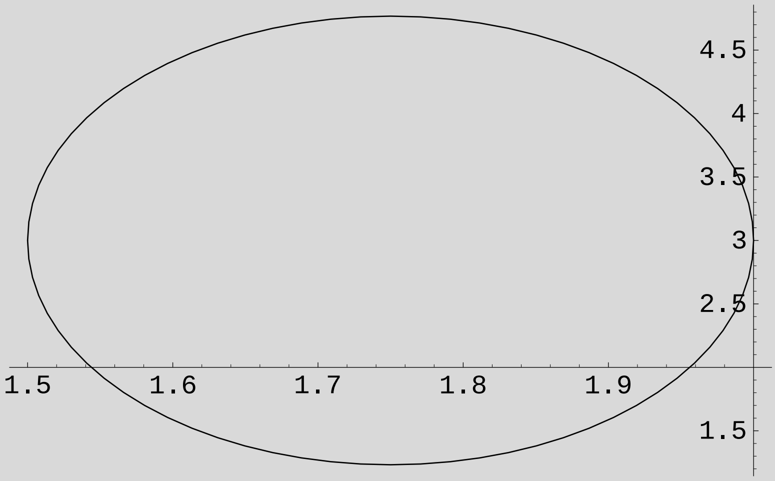
```
GroebnerBasis[{x (t^2 + 2t + 3) - (2t^2 + 4t + 5), y (t^2 + 2t + 3) - (3t^2 + t + 4)}, {t, x, y}]
```

$$\{159 - 175x + 50x^2 - 6y + y^2,\ -18 - 3t + 10x + y + ty,\ -7 - 10t + 5x + 5tx - y\}$$

Das Polynomial, welches den Parameter *t nicht enthält*, ist die implizite Darstellung der Kurve!

```
Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]
```

```
ImplicitPlot[159 - 175 x + 50 x^2 - 6 y + y^2 == 0, {x, 1.5, 2}, AspectRatio -> 1/GoldenRatio];
```



Was ist eine Gröbner Basis?

Zutaten

- $K[x_1, \ldots, x_n]$ … der (kommutative) ring der Polynome in n Variablen über dem Koeffizientenkörper K (mit Addition und Multiplikation).

- $F \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ … endliche Menge von Polynomen (sagen wir $F = \{F_1, \ldots, F_m\}$).

- Ideal$[F]$ … das *von F erzeugte Ideal*, d.h.

  $$\left\{\sum_{i=1}^{m} h_i\ F_i\ :\ h_i \in K[x_1, \ldots, x_n]\right\}$$

  Ideale spielen eine entscheidende Rolle, wenn wir über die *gemeinsamen Wurzeln* ($\approx$ Nullstellen) der Polynome in F reden wollen. eine gemeinsame Wurzel von F ist auch Wurzel jedes anderen Polynoms in Ideal$[F]$, mit anderen Worten, *Ideal$[F]$ erhält die gemeinsamen Wurzeln von F*.

- Ein Ideal $\mathcal{I}$ in einem Ring R induziert eine *Kongruenzrelation*:

  $$f \sim_{\mathcal{I}} g \iff f - g \in \mathcal{I}$$

- Der *Restklassen-Ring (Factor-Ring)* $R / \mathcal{I}$ besteht aus den Restklassen bzgl. $\sim_{\mathcal{I}}$, Addition und Multiplikation sind wohldefiniert.
  (Ideale in Ringen spielen die Rolle von Normalteilern in Gruppen …)

Was ist eine Gröbner Basis?

Zutaten

Wie gelangen wir zum Begriff “Gröbner Basis”?

- GB sind eine Verallgemeinerung des ggT (univariater Fall) und Dreiecksmatrizen (linearer Fall),der GB Algorithmus spezialisiert daher

— zum *Euklid’schen Algorithmus* im univariater Fall

— zum *Gauss’schen Algorithmus* im linearen Fall.

Was ist eine Gröbner Basis?

Wie gelangen wir zum Begriff "Gröbner Basis" durch Verallgemeinerung des ggT-Begriffs?

- Betrachten wir den Fall von univariaten Polynomen, i.e. $n = 1$. Sei $\mathcal{I} = \text{Ideal}[F_1, \ldots, F_m]$.

— Gegeben zwei Polynome f und g, entscheide ob $f \sim_{\mathcal{I}} g$.

— Jedes Ideal in $K[x]$ ist von einem einzigen Polynom *erzeugt*, und zwar vom $\text{ggT}[F_1, \ldots, F_m]$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
f \sim_{\mathcal{I}} g \quad &\Leftrightarrow \quad f - g \in \text{Ideal}[\text{ggT}[F_1, \ldots, F_m]] \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad f - g = h * \text{ggT}[F_1, \ldots, F_m] \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad (f - g) \ \text{mod} \ \text{ggT}[F_1, \ldots, F_m] = 0.
\end{aligned}
$$

```
Needs["Algebra‘PolynomialExtendedGCD‘"]
```

```
{F1, F2} = {x^2 - 1, x^2 + 2 x + 1};
```

```
f = x^5 - 3 x^3 + 2 x;
g = 3 x^7 + 26 x^4 + 19 x - 5;
```

```
{G, {c1, c2}} = PolynomialExtendedGCD[F1, F2]
```

$\{1 + x, \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}\}$

```
PolynomialRemainder[f - g, G, x]
```

1

Das heißt, f und g sind *nicht kongruent* modulo $\text{Ideal}[F_1, F_2]$.

```
h = PolynomialQuotient[f - g, G, x]
```

$4 - 21 x + 21 x^2 - 24 x^3 - 2 x^4 + 3 x^5 - 3 x^6$

Es gilt

```
f - g
```

$5 - 17 x - 3 x^3 - 26 x^4 + x^5 - 3 x^7$

```
Expand[h * G]
```

$4 - 17 x - 3 x^3 - 26 x^4 + x^5 - 3 x^7$

Andererseits gilt:

```
f = x^5 + 3 x^2 + 2 x - 3;
g = x^5 - 3 x^3 - 5;
```

```
PolynomialRemainder[f - g, G, x]
```

0

Das heißt, *f* und *g* sind *kongruent* modulo Ideal[F_1, F_2].

```
h = PolynomialQuotient[f – g, G, x]
```

$2 + 3 x^2$

Tatsächlich gilt:

```
f – g
```

$2 + 2 x + 3 x^2 + 3 x^3$

$f - g$ ist ein Vielfaches des ggT:

```
Expand[h * G]
```

$2 + 2 x + 3 x^2 + 3 x^3$

$f - g$ können wir als Linearkombination der Basispolynome darstellen

$(c_1\, h)\, F_1 + (c_2\, h)\, F_2$ // Expand

$2 + 2 x + 3 x^2 + 3 x^3$

Was ist eine Gröbner Basis?

Wie gelangen wir zum Begriff “Gröbner Basis” durch Verallgemeinerung des ggT-Begriffs?

Multivariate Polynome

- Multivariate polynome bestehen aus einer Summe von *Monomen*, jedes Monom besteht aus einem *Koeffizient* und einem *Potenzprodukt*, ein Potenzprodukt ist ein Produkt von Potenzen einzelner Variablen.

$$\underbrace{\overbrace{3}^{\text{coef}}\;\overbrace{x^4}^{\text{pp}}} + \underbrace{\overbrace{2}^{\text{coef}}\;\overbrace{x\,y^2}^{\text{pp}}}_{\text{Monome}} + \underbrace{\overbrace{y^3}^{\text{pp}}}$$

- Zur Reduktion ($\approx$ Division) brauchen wir eine *zulässige Ordnung (admissible ordering)* $\prec$ auf den Potenzprodukten

$1 \prec p$	für alle $p \neq 1$	(well-foundedness)
$p_1 \prec p_2 \Rightarrow s * p_1 \prec s * p_2$	für alle p_1, p_2, s	(compatibility with $*$)

- Typische Ordnungen basierend auf einer Ordnung auf den einzelnen Variablen $x_1 > \ldots > x_n$:

— Lexikographisch: zuerst nach Potenzen von x_1, dann von x_2, etc.   (Telefonbuch).

— Totalgrad: zuerst nach total degree, innerhalb gleichen Grades lexikographisch.

- *Führendes Monom (leading monomial)* (lm) eines Polynoms p:das größte Monom in p bzgl. $\prec$.

Was ist eine Gröbner Basis?

Wie gelangen wir zum Begriff “Gröbner Basis” durch Verallgemeinerung des ggT-Begriffs?

Multivariate Polynome

Polynom Reduktion

- Eine *Verallgemeinerte Division* eines Polynoms durch eine Menge von Polynomen: *Polynom Reduktion*.
- Wie *Polynom Division*: “wiederholte Subtraktion von Vielfachen des Divisors, um Monome zu eliminieren”.
- Wir nennen f *reduzierbar mit* g *auf* f_1 wenn es ein Monom in f gibt, das ein Vielfaches des führenden Monoms in g ist, und wir bekommen f_1 durch Subtraktion eines geeigneten Vielfachen von g von f, sodass dieses Monom verschwindet. Andernfalls sagen wir f ist nicht reduzierbar durch g.

  Wir schreiben dafür: $f \to_g f_1$.
- Wir nennen h *eine Normalform von* f *bzgl.* F wenn es eine Sequenz von Reduktionen gibt

  $f \to_{g_1} f_1 \to_{g_2} f_2 \to_{g_3} \ldots \to_{g_k} h$

  sodass

  — $g_i \in F$ für alle $1 \leq i \leq k$

  — h ist nicht reduzierbar durch ein Polynom in F.

  Wir schreiben: $f \to_F^\star h$.
- Wir schreiben *NormalForm*$[f, F]$ für ein h mit $f \to_F^\star h$.

Was ist eine Gröbner Basis?

Ein Beispiel

- Zuerst univariat: Polynomdivision x^4 durch $x - 1$

```
PolynomialQuotient[x^4, x - 1, x]
```

$1 + x + x^2 + x^3$

```
PolynomialRemainder[x^4, x - 1, x]
```

1

- Jetzt multivariat: Brauchen Termordnung: Lexikographisch bzgl. $x > y$: Wir eliminieren immer das führende Monom.

```
f = x^4 + y^4;
{F1, F2} = {x + y - 1, x y - 3}; h = f;
```

```
h = h - x^3 F1 // Expand
```

$x^3 - x^3 y + y^4$

```
h = h - (-1) x^2 F2 // Expand
```

$-3 x^2 + x^3 + y^4$

```
h = h - x^2 F1 // Expand
```

$-2 x^2 - x^2 y + y^4$

```
h = h - (-1) x F2 // Expand
```

$-3 x - 2 x^2 + y^4$

```
h = h - (-2) x F1 // Expand
```

$-5 x + 2 x y + y^4$

```
h = h - 2 F2 // Expand
```

$6 - 5 x + y^4$

```
h = h - (-5) F1 // Expand
```

$1 + 5 y + y^4$

Das ursprüngliche Polynom ist eine *Linearkombination* der *Normalform* und der *Erzeuger des Ideals*:

$$(1+5y+y^4)+(x^3+x^2-2x-5)*F_1+(-x^2-x+2)*F_2 \text{ // Expand}$$

$$x^4+y^4$$

Andere Strategie: wir verwenden immer F_1 (wenn möglich)

$$f = x^4+y^4;$$
$$\{F_1, F_2\} = \{x+y-1,\ x\,y-3\};\ h = f;$$

$$h = h - x^3 F_1 \text{ // Expand}$$

$$x^3 - x^3 y + y^4$$

$$h = h - (-1)\,x^2\,y\,F_1 \text{ // Expand}$$

$$x^3 - x^2 y + x^2 y^2 + y^4$$

$$h = h - x^2 F_1 \text{ // Expand}$$

$$x^2 - 2x^2 y + x^2 y^2 + y^4$$

$$h = h - x\,y^2 F_1 \text{ // Expand}$$

$$x^2 - 2x^2 y + x\,y^2 - x\,y^3 + y^4$$

$$h = h - (-2)\,x\,y\,F_1 \text{ // Expand}$$

$$x^2 - 2x\,y + 3x\,y^2 - x\,y^3 + y^4$$

$$h = h - x\,F_1 \text{ // Expand}$$

$$x - 3x\,y + 3x\,y^2 - x\,y^3 + y^4$$

$$h = h - (-1)\,y^3 F_1 \text{ // Expand}$$

$$x - 3x\,y + 3x\,y^2 - y^3 + 2y^4$$

$$h = h - 3y^2 F_1 \text{ // Expand}$$

$$x - 3x\,y + 3y^2 - 4y^3 + 2y^4$$

$$h = h - (-3)\,y\,F_1 \text{ // Expand}$$

$$x - 3y + 6y^2 - 4y^3 + 2y^4$$

$$h = h - F_1 \text{ // Expand}$$

$$1 - 4y + 6y^2 - 4y^3 + 2y^4$$

In *Mathematica*:

```
PolynomialReduce[f, {F1, F2}, {x, y}]
```

$$\{\{1+x+x^2+x^3-3y-2x\,y-x^2 y+3y^2+x\,y^2-y^3,\ 0\},\ 1-4y+6y^2-4y^3+2y^4\}$$

$$\left(1-4\,y+6\,y^2-4\,y^3+2\,y^4\right)+ \left(1+x+x^2+x^3-3\,y-2\,x\,y-x^2\,y+3\,y^2+x\,y^2-y^3\right)*F_1+0\,F_2 \text{ // Expand}$$

$$x^4+y^4$$

Wir sehen

Reduktion bzgl. einer beliebigen Polynommenge ist nicht unbedingt eindeutig!

Aber Gröbner Basen bringen eindeutige Normalformen!

F ist eine Gröbner Basis gdw. für alle $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$: $f \to_F^\star h_1 \wedge f \to_F^\star h_2 \Rightarrow h_1 = h_2$.

Daten & Fakten über Gröbner Basen

— F ist eine Gröbner Basis gdw. für alle $f \in \text{Ideal}[F]$: $f \to_F^\star 0$.

— wenn F eine Gröbner Basis ist: $f \in \text{Ideal}[F] \Leftrightarrow f \to_F^\star 0$.

— $\to_F^\star$ ist ein kanonischer Simplifier für $\sim_{\text{Ideal}[F]}$, i.e. GB ermöglichen Arithmetik im Restklassenring

— Wenn F ein GB bzgl. der lexikographischen Termordnung bzgl. $x_n > \ldots > x_1$ ist, dann hat F die *Eliminationseigenschaft*, d.h. $\text{Ideal}[F] \cap K[x_1, \ldots, x_i] = \text{Ideal}[F \cap K[x_1, \ldots, x_i]]$,

d.h. das i−te Eliminationsideal kann einfach ermittelt werden: wir nehmen einfach die Polynome aus F, die nur von den ersten i Variablen abhängen. Das wird uns das Lösen von Gleichungssystemen ermöglichen, siehe später!

Ein Algorithmus zum Berechen einer Gröbner Basis

- Gegeben: $F \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ endlich, Termordnung $\prec$
- Gesucht: G, mit
  — Ideal$[G]$ = Ideal$[F]$
  — G ist eine Gröbner Basis.

Ein Algorithmus zum Berechen einer Gröbner Basis

Hauptsatz der Gröbner Basen Theorie

F ist eine Gröbner Basis gdw. für alle $f_1, f_2 \in F$: S-Polynomial$[f_1, f_2] \to_F^\star 0$.

S-Polynome

- Multipliziere zwei Polynome jeweils so, dass nach Subtraktion das führende Monom verschwindet. Formal:

$$\text{S-Polynomial}[f_1, f_2] := \frac{\text{lcm}[\text{lm}[f_1], \text{lm}[f_2]]}{\text{lm}[f_1]} f_1 - \frac{\text{lcm}[\text{lm}[f_1], \text{lm}[f_2]]}{\text{lm}[f_2]} f_2$$

— Beispiel: $f_1 = x + y - 1$, $f_2 = x\,y - 3$

$\text{lcm}[\text{lm}[f_1], \text{lm}[f_2]] = x\,y$

```
g1 = y (x + y - 1)   // Expand
-y + x y + y^2
```

```
g2 = 1 * (x y - 3)
-3 + x y
```

```
g1 - g2
3 - y + y^2
```

$x\,y$ ist verschwunden!!!

Ein Algorithmus zum Berechen einer Gröbner Basis

Die Hauptidee

- Reduziere alle S-Polynome bzgl. F.
- Wenn alle Reduktionen auf 0 gehen, dann ist F eine Gröbner Basis (Hauptsatz).
- Wenn eine Reduktion ein $h \neq 0$ liefert, dann
  — nimm h zu F (sodass h zu 0 reduziert bzgl. dem neuen F) und
  — reduziere alle neuen S-Polynome, die nun geformt werden können.

Der Grundalgorithmus

```
GB[F_] :=
  Module[{G = F, P = {{f1, f2} : fi ∈ F, f1 ≠ f2}, p, h},
    While[P ≠ ∅,
      {p1, p2} = ein Paar aus P;
      P = P − {{p1, p2}};
      h = NormalForm[S-Polynomial[p1, p2], G];
      If[h ≠ 0,
        P = P ⋃ {{h, g} : g ∈ G};
        G = G ⋃ {h}]]]
```

Der Algorithmus …

- ist *korrekt* auf Grund des Hauptsatzes (bei Termination reduzieren alle S-Polynome zu 0) und
- *terminiert* wegen des Dickson Lemmas (die Folge $(l_i)_{i \in \mathbb{N}}$ der führenden Monome der h's hat die Eigen−schaft, dass jedes l_i *kein Vielfaches eines* l_j mit $j < i$ ist Diese Folge *muss endlich sein*.

Ein Algorithmus zum Berechen einer Gröbner Basis

Verfeinerungen

- Eine Gröbner Basis F ist eine *reduzierte Gröbner Basis* iff für alle $f \in F$: f ist nicht reduzierbar durch $g \in F - \{f\}$ und $\mathrm{lm}[f] = 1$.
- Für jedes F existiert eine *eindeutig bestimmte* reduzierte Gröbner Basis, die das gleiche Ideal erzeugt wie F, wir schreiben dafür $\mathrm{GB}[F]$.

Illustration des Algorithmus

Totalgrad lexikographische Ordnung bzgl. $y > x$.

Im grafisch veranschaulichen!

```
G = {3 x^4 + 2 x y^2 + y^3, x^2 y - 5 x y + 2 x^3}; P = {{G[[1]], G[[2]]}};
```

Erstes Paar:

```
{p1, p2} = P[[1]]; Print[{p1, p2}]; P = Rest[P];
```

$\{3x^4 + 2xy^2 + y^3,\ 2x^3 - 5xy + x^2 y\}$

```
sp = y p1 - 3 x^2 p2 // Expand
```

$-6x^5 + 15x^3 y + 2xy^3 + y^4$

```
{c, h} = PolynomialReduce[sp, G, {y, x}, MonomialOrder -> DegreeLexicographic]
```

$\left\{\left\{-\frac{14}{3} - 2x,\ 35 + 7x + 4y\right\},\ -70x^3 + 175xy + \frac{88xy^2}{3} + \frac{14y^3}{3} + 4xy^3 + y^4\right\}$

```
P = Join[P, Table[{h, G[[i]]}, {i, 1, Length[G]}]]; PrependTo[G, h];
```

```
P
```

$$\left\{\left\{-70x^3 + 175xy + \frac{88xy^2}{3} + \frac{14y^3}{3} + 4xy^3 + y^4,\ 3x^4 + 2xy^2 + y^3\right\},\right.$$
$$\left.\left\{-70x^3 + 175xy + \frac{88xy^2}{3} + \frac{14y^3}{3} + 4xy^3 + y^4,\ 2x^3 - 5xy + x^2 y\right\}\right\}$$

```
G
```

$\left\{-70x^3 + 175xy + \frac{88xy^2}{3} + \frac{14y^3}{3} + 4xy^3 + y^4,\ 3x^4 + 2xy^2 + y^3,\ 2x^3 - 5xy + x^2 y\right\}$

Nächstes Paar:

```
{p1, p2} = P[[1]]; Print[{p1, p2}]; P = Rest[P];
```

$\left\{-70x^3 + 175xy + \frac{88xy^2}{3} + \frac{14y^3}{3} + 4xy^3 + y^4,\ 3x^4 + 2xy^2 + y^3\right\}$

```
sp = 3 x^4 p1 - y^4 p2 // Expand
```

$-210x^7 + 525x^5 y + 88x^5 y^2 + 14x^4 y^3 + 12x^5 y^3 - 2xy^6 - y^7$

```
{c, h} = PolynomialReduce[sp, G, {y, x}, MonomialOrder → DegreeLexicographic]
```

$$\left\{\left\{-\frac{2\,x\,y^2}{3}-\frac{y^3}{3},\,-70\,x^3+175\,x\,y+\frac{88\,x\,y^2}{3}+\frac{14\,y^3}{3}+4\,x\,y^3,\,0\right\},\,0\right\}$$

Nächstes Paar:

```
{p1, p2} = P[[1]]; Print[{p1, p2}]; P = Rest[P];
```

$$\left\{-70\,x^3+175\,x\,y+\frac{88\,x\,y^2}{3}+\frac{14\,y^3}{3}+4\,x\,y^3+y^4,\,2\,x^3-5\,x\,y+x^2\,y\right\}$$

```
sp = x^2 p1 - y^3 p2 // Expand
```

$$-70\,x^5+175\,x^3\,y+\frac{88\,x^3\,y^2}{3}+\frac{14\,x^2\,y^3}{3}+2\,x^3\,y^3+5\,x\,y^4$$

```
{c, h} = PolynomialReduce[sp, G, {y, x}, MonomialOrder → DegreeLexicographic]
```

$$\left\{\left\{\frac{56}{9}+\frac{7\,x}{3}+\frac{4\,y}{3},\,\frac{1}{3}\left(-\frac{784}{9}-70\,x-\frac{112\,y}{3}-4\,y^2\right),\,\frac{1}{3}\left(\frac{1960}{3}+\frac{1127\,x}{3}+\frac{644\,y}{3}+56\,x\,y+16\,y^2+6\,x\,y^2\right)\right\},\,0\right\}$$

```
P
```

{}

```
G
```

$$\left\{-70\,x^3+175\,x\,y+\frac{88\,x\,y^2}{3}+\frac{14\,y^3}{3}+4\,x\,y^3+y^4,\,3\,x^4+2\,x\,y^2+y^3,\,2\,x^3-5\,x\,y+x^2\,y\right\}$$

Reduzierte GB:

```
MapAt[Expand[#/3] &, G, 2]
```

$$\left\{-70\,x^3+175\,x\,y+\frac{88\,x\,y^2}{3}+\frac{14\,y^3}{3}+4\,x\,y^3+y^4,\,x^4+\frac{2\,x\,y^2}{3}+\frac{y^3}{3},\,2\,x^3-5\,x\,y+x^2\,y\right\}$$

Vergleich mit *Mathematica*: im Wesentlichen gleich modulo einem konstanten Faktor. (*Mathematica*'s Polynome sind nicht normalisiert aber haben Integer Koeffizienten).

```
GroebnerBasis[G, {y, x}, MonomialOrder → DegreeLexicographic]
```

$$\left\{2\,x^3-5\,x\,y+x^2\,y,\,3\,x^4+2\,x\,y^2+y^3,\,-210\,x^3+525\,x\,y+88\,x\,y^2+14\,y^3+12\,x\,y^3+3\,y^4\right\}$$

Verbesserungen im GB-Algorithmus

- Die aufwändige Operation im Algorithmus sind die Null-Reduktionen. Sie bringen auch keine neue Information, daher wenn geht vermeiden.
  Es gibt *zwei Kriterien [Buchberger]*.

  — wenn $\mathrm{lcm}[\mathrm{lm}[f_1], \mathrm{lm}[f_2]] = \mathrm{lm}[f_1] \cdot \mathrm{lm}[f_2]$ dann S-Polynomial$[f_1, f_2] \to_F^{\star} 0$.
  (würde die erste 0-Reduction im Beispiel verhindern.)

  — komplizierter, würde die zweite 0-Reduktion auch nicht verhindern.

- Termordnung hat drastischen Einfluss. Total degree schneller, aber Vorsicht: das Resultat hängt von der Termordnung ab!

- Die Abfolge, in der Paare reduziert werden, hat drastischen Einfluss (Paare mit kleinem lcm der lm's zuerst).

- Viele Verbesserungsmöglichkeiten, siehe Buchberger im Bose-paper 1985, "sugar cube strategy", FGLM, "Gröbner walk", etc.),

Anwendungen

Lösen algebraischer Gleichungssysteme

Wir schreiben $\overline{F}$ für das zur Polynommenge F assoziierte Gleichungssystem, d.h. $\overline{F} = \{f = 0 : f \in F\}$.

- $\mathrm{GB}[F] = \{1\}$ gdw $\overline{F}$ hat *keine Lösungen*

- für alle x_i: $\mathrm{GB}[F]$ enthält ein f mit $\mathrm{lm}[f] = x_i^j$ gdw. $\overline{F}$ hat *endlich viele Lösungen* (Ideal$[F]$ heißt dann *0-dimensional*).

- Für lexikographische Ordnung bzgl. $x_n > \ldots > x_1$ bewirkt die erwähnte *Eliminationseigenschaft*, dass $\mathrm{GB}[F]$ *trianguliert* ist (falls Ideal$[F]$ 0-dimensional ist) im folgenden Sinn:

— $\mathrm{GB}[F]$ enthält ein univariates Polynom in x_1.

— $\mathrm{GB}[F]$ enthält mindestens ein Polynom in x_1 und x_2.

— etc.

Damit können wir alle Lösungen komponentenweise berechnen durch Rücksubstitution (wie im Gauss'schen Algorithmus).

Beispiel

$$F = \{3x^4 + 2xy^2 + y^3,\ x^2 y - 5xy + 2x^3\};$$

- Sind wir hauptsächlich an Lösungen in x interessiert? $\longrightarrow$ Wähle $y > x$.

$$G = \mathrm{GroebnerBasis}[F, \{y, x\}]$$

$$\{-375x^5 + 185x^6 - 45x^7 + 3x^8,\ -1000x^3 - 200x^4 + 35x^5 - 30x^6 + 3x^7 + 2500xy,\ 375x^4 - 110x^5 + 45x^6 - 3x^7 + 125y^3\}$$

$$G[[1]] \mathbin{//} \mathrm{Factor}$$

$$x^5 (-375 + 185x - 45x^2 + 3x^3)$$

- Vergleichen wir mit der "händischen Rechnung" oben bzgl Totalgrad-Ordnung: dort hatten wir *kein univariates Polynom*.

- Sind wir hauptsächlich an Lösungen in y interessiert? $\longrightarrow$ Wähle $x > y$.

$$G = \mathrm{GroebnerBasis}[F, \{x, y\}]$$

$$\{5625y^4 + 1340y^5 + 150y^6 + 3y^7,\ 23709375xy^2 - 623560y^4 - 369975y^5 - 8952y^6,\ 355640625x^2 y + 47418750y^3 - 10774085y^4 - 1134600y^5 - 20532y^6,\ 711281250x^3 - 1778203125xy - 47418750y^3 + 10774085y^4 + 1134600y^5 + 20532y^6\}$$

$$gy = G[[1]] \mathbin{//} \mathrm{Factor}$$

$$y^4 (5625 + 1340y + 150y^2 + 3y^3)$$

```
sy = Solve[gy == 0, y]
```

$$\Big\{\{y\to 0\},\{y\to 0\},\{y\to 0\},\{y\to 0\},$$
$$\Big\{y\to \frac{1}{3}\Big(-50-232\,5^{2/3}\Big(\frac{2}{19925-281\sqrt{1865}}\Big)^{1/3}-\Big(\frac{5}{2}\big(19925-281\sqrt{1865}\big)\Big)^{1/3}\Big)\Big\},$$
$$\Big\{y\to -\frac{50}{3}+\frac{116}{3}5^{2/3}\big(1+i\sqrt{3}\big)\Big(\frac{2}{19925-281\sqrt{1865}}\Big)^{1/3}+$$
$$\frac{1}{6}\big(1-i\sqrt{3}\big)\Big(\frac{5}{2}\big(19925-281\sqrt{1865}\big)\Big)^{1/3}\Big\},$$
$$\Big\{y\to -\frac{50}{3}+\frac{116}{3}5^{2/3}\big(1-i\sqrt{3}\big)\Big(\frac{2}{19925-281\sqrt{1865}}\Big)^{1/3}+$$
$$\frac{1}{6}\big(1+i\sqrt{3}\big)\Big(\frac{5}{2}\big(19925-281\sqrt{1865}\big)\Big)^{1/3}\Big\}\Big\}$$

Jetzt: Einsetzen der Lösungen für *y* in den Polynomen, die nur von *x*, *y* abhängen.

```
Gx = Rest[G] /. sy; Short[Gx, 2]
```

$$\Big\{\{0,0,711281250\,x^3\},\ \ll 5\gg,\ \Big\{-623560$$
$$\Big(-\frac{50}{3}+\frac{116}{3}5^{\ll 1\gg}(\ll 1\gg)\Big(\frac{2}{\ll 1\gg}\Big)^{1/3}+\frac{1}{6}\big(1+i\sqrt{3}\big)\Big(\frac{5}{2}(19925-281\ll 1\gg)\Big)^{1/3}\Big)^4-$$
$$369975(\ll 1\gg)^5-8952(\ll 1\gg\ll 1\gg^6+$$
$$23709375\Big(-\frac{50}{3}+\ll 1\gg+\frac{1}{6}(1+\ll 1\gg)(\ll 1\gg)^{1/3}\Big)^2x,\ \ll 1\gg,\ \ll 1\gg\Big\}\Big\}$$

Jedes von denen ist ein nGleichungssystem in $x \longrightarrow$ berechne ggT und löse!

Die ersten vier sind einfach, wir bekommen jeweils $x = 0$, damit haben wir eine Lösung $\langle 0, 0\rangle$ mit Vielfach−heit 4.

Jetzt das fünfte System:

```
Gx5 = Gx[[5]]; Map[Exponent[#, x] &, Gx5]
{1, 2, 3}
```

```
PolynomialRemainder[Gx5[[2]], Gx5[[1]], x] // Simplify
0
```

```
PolynomialRemainder[Gx5[[3]], Gx5[[1]], x] // Simplify
0
```

Das erste Polynom teilt also sowohl das Zweite als auch das Dritte, damit ist der ggT gleich dem ersten Polynom, jenem *mit niedrigsten Grad*. Das war kein Zufall!

- Im Prozess der Rücksubstitution ist der ggT der univariaten Polynome *immer* genau jenes Polynom mit niedrigstem Grad [Gianni, Kalkbrener, 1987].

```
sx5 = Solve[Gx5[[1]] == 0, x]
```

$$\left\{\left\{x \to \left(\frac{623560}{81}\left(-50-232\,5^{2/3}\left(\frac{2}{19925-281\sqrt{1865}}\right)^{1/3}-\left(\frac{5}{2}\left(19925-281\sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right)^4+\frac{123325}{81}\left(-50-232\,5^{2/3}\left(\frac{2}{19925-281\sqrt{1865}}\right)^{1/3}-\left(\frac{5}{2}\left(19925-281\sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right)^5+\frac{2984}{243}\left(-50-232\,5^{2/3}\left(\frac{2}{19925-281\sqrt{1865}}\right)^{1/3}-\left(\frac{5}{2}\left(19925-281\sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right)^6\right)\Big/\left(2634375\left(-50-232\,5^{2/3}\left(\frac{2}{19925-281\sqrt{1865}}\right)^{1/3}-\left(\frac{5}{2}\left(19925-281\sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right)^2\right)\right\}\right\}$$

```
s5 = Join[sy[[5]], sx5[[1]]]; N[s5]
```

$\{y \to -40.0067,\ x \to 10.1309\}$

Und das ist eine Lösung …

```
F /. s5 // N
```

$\{-3.81988\times 10^{-10},\ 4.54747\times 10^{-13}\}$

```
F /. s5 // Simplify
```

$\{0, 0\}$

Die restlichen Lösungen bekommen wir analog …

Mathematica (z.B.) verwendet Gröbner Basen im internen Solve …

```
Solve[Thread[F == 0], {x, y}]
```

$$\{\{y \to 0, x \to 0\}, \{y \to 0, x \to 0\}, \{y \to 0, x \to 0\}, \{y \to 0, x \to 0\}, \{y \to 0, x \to 0\}, \{y \to 0, x \to 0\}, \{y \to 0, x \to 0\}, \Bigg\{y \to \frac{1}{2500}\Bigg(\left(5-\frac{1}{18}\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(24300-540\sqrt{1865}\right)^{1/3}-\frac{1}{3}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(\frac{5}{2}\left(45+\sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right)^2\Bigg(1000+200\left(5-\frac{1}{18}\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(24300-540\sqrt{1865}\right)^{1/3}-\frac{1}{3}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(\frac{5}{2}\left(45+\sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right)-35\left(5-\frac{1}{18}\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(24300-540\sqrt{1865}\right)^{1/3}-\frac{1}{3}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(\frac{5}{2}\left(45+\sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right)^2+30\left(5-\frac{1}{18}\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(24300-540\sqrt{1865}\right)^{1/3}-\frac{1}{3}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(\frac{5}{2}\left(45+\sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right)^3-3\left(5-\frac{1}{18}\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(24300-540\sqrt{1865}\right)^{1/3}-\frac{1}{3}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(\frac{5}{2}\left(45+\sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right)^4\Bigg)\Bigg),$$

$$x \to 5 - \frac{1}{18}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(24300 - 540\sqrt{1865}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(\frac{5}{2}\left(45 + \sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\Big\}, \Big\{y \to$$

$$\frac{1}{2500}\Bigg(\left(5 - \frac{1}{18}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(24300 - 540\sqrt{1865}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(\frac{5}{2}\left(45 + \sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right)^2$$

$$\Bigg(1000 + 200\left(5 - \frac{1}{18}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(24300 - 540\sqrt{1865}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(\frac{5}{2}\left(45 + \sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right) - 35\left(5 - \frac{1}{18}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(24300 - 540\sqrt{1865}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(\frac{5}{2}\left(45 + \sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right)^2 +$$

$$30\left(5 - \frac{1}{18}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(24300 - 540\sqrt{1865}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(\frac{5}{2}\left(45 + \sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right)^3 - 3\left(5 - \frac{1}{18}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(24300 - 540\sqrt{1865}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(\frac{5}{2}\left(45 + \sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right)^4\Bigg)\Bigg),$$

$$x \to 5 - \frac{1}{18}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(24300 - 540\sqrt{1865}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(\frac{5}{2}\left(45 + \sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\Big\},$$

$$\Big\{y \to \frac{1}{2500}\Bigg(\left(5 + \frac{1}{9}\left(24300 - 540\sqrt{1865}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}2^{2/3}\left(5\left(45 + \sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right)^2$$

$$\Bigg(1000 + 200\left(5 + \frac{1}{9}\left(24300 - 540\sqrt{1865}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}2^{2/3}\left(5\left(45 + \sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right) - 35\left(5 + \frac{1}{9}\left(24300 - 540\sqrt{1865}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}2^{2/3}\left(5\left(45 + \sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right)^2 +$$

$$30\left(5 + \frac{1}{9}\left(24300 - 540\sqrt{1865}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}2^{2/3}\left(5\left(45 + \sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right)^3 - 3\left(5 + \frac{1}{9}\left(24300 - 540\sqrt{1865}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}2^{2/3}\left(5\left(45 + \sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\right)^4\Bigg)\Bigg),$$

$$x \to 5 + \frac{1}{9}\left(24300 - 540\sqrt{1865}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}2^{2/3}\left(5\left(45 + \sqrt{1865}\right)\right)^{1/3}\Big\}\Big\}$$

Beispiel (mit Parametern)

$$F = \{A x^4 + B x y^2 + C y^3, x^2 y - 5 x y + 2 x^3\};$$

```
G = GroebnerBasis[F, {x, y}, CoefficientDomain → RationalFunctions] // Short[#, 2] &
```

$$\{-625 A^2 y^4 + (-150 A B + 40 B^2 - 200 A C) y^5 + (-5 A B - 40 A C + 8 B C - 16 C^2) y^6 - A C y^7, \ll 1\gg, \ll 1\gg, (-781250 A^6 + 625000 A^5 B - 2500000 A^5 C + 1000000 A^4 B C) x^3 + \ll 4\gg + (-125 A^4 B C + \ll 12\gg + 320 A^2 B C^3) y^6\}$$

```
G = GroebnerBasis[F, {x, y, A, B, C}] // Short[#, 2] &
```

$$\{625 A^2 C y^4 + 150 A B C y^5 - 40 B^2 C y^5 + 200 A C^2 y^5 + 5 A B C y^6 + 40 A C^2 y^6 - 8 B C^2 y^6 + 16 C^3 y^6 + A C^2 y^7, \ll 19 \gg, 2 x^3 - 5 x y + x^2 y\}$$

Vorsicht bei Symbolic Computation mit Parametern:

- Nehmen wir rationale Funktionen in den Parametern als Koeffizientenbereich, so wird angenommen, dass die Parameter einen *Körper* bilden, und es wird an manchen Stellen durch Parameter *dividiert*. Für manche konkrete Werte der Parameter kann diese Operation aber schiefgehen. Im Beispiel oben etwa $C = 0$.
- Nehmen wir die Parameter als normale Polynomvariable, so bilden diese nur einen *Ring*, und es wird *nicht dividiert*. Die Anzahl der Variablen wird aber erhöht, was normalerweise den Rechenaufwand erhöht.

Beispiele aus der Biologie

Bestimmung stabiler Positionen von Proteinen in Zellmembranen

- z_i … Koordinaten in $\mathbb{C}$. Stabile Position ist eine “Null-Energie-Position” und eine Formel für die Energie ist bekannt.
  Führt auf Gleichungssysteme der Form

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{1}{(z_i - z_j)^2} == 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, N$$

Obiges Gleichungssystem heißt *Membran Inclusion Curvature Equations (MICE)*.

— Gesucht sind Lösungen für z_i.

Lösung

- Wir müssen zuerst die Nenner wegbekommen, damit wir ein polynomiales GLS haben $\longrightarrow$ gemeinsamer Nennen und diesen weglassen. Führt auf

$$P_i[z_1, \ldots, z_n] := \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i, k\neq j}}^{N} (z_i - z_k)^2 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, N$$

```
Clear[P]
```

```
P[i_, z_] := With[{N = Length[z]}, Sum_{j=1}^{N} If[j =!= i, Product_{k=1}^{N} If[k =!= i ∧ k =!= j, (z[[i]] − z[[k]])^2, 1], 0]]
```

- Durch Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner bekommen wir “falsche Lösungen”, wir eliminieren diese mit einer Bedingung

$$\prod_{i=1}^{N} \prod_{j=i+1}^{N} (z_i - z_j) \neq 0 \quad \text{und damit} \quad u * \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=i+1}^{N} (z_i - z_j) == 1$$

- Wir können durch Verschiebung und Skalierung jedenfalls erreichen, dass $z_1 == 0$ und $z_2 == 1$.
- Insgesamt erhalten wir

```
M[z_] := With[{N = Length[z]}, Join[
        Table[P[i, z], {i, 1, N}],
        {z[[1]],
          z[[2]] − 1,
          u Product_{i=1}^{N} Product_{j=i+1}^{N} (z[[i]] − z[[j]]) − 1}]]
```

- N=3: keine Lösungen, d.h. keine stabile Position möglich!

```
GroebnerBasis[M[{z1, z2, z3}], {u, z1, z2, z3}]
{1}
```

- N=4: keine Lösungen, d.h. keine stabile Position möglich!

```
GroebnerBasis[M[{z1, z2, z3, z4}], {u, z1, z2, z3, z4}]
```

{1}

- N=5: *Mathematica* schafft das nicht mehr, wir nehmen *Singular*.

```
<< Singular.m
```

```
Singular -- Interface to Mathematica   Package by Manuel Kauers — ©
RISC Linz — V 0.3 (2005-11-08)
```

```
GB = SingularGroebner[M[{z1, z2, z3, z4, z5}],
    {u, z1, z2, z3, z4, z5}, MonomialOrder → Lexicographic]
```

$$\{1 - 6\,z5 + 20\,z5^2 - 45\,z5^3 + 76\,z5^4 - 100\,z5^5 + 109\,z5^6 - 100\,z5^7 + 76\,z5^8 - 45\,z5^9 + 20\,z5^{10} - 6\,z5^{11} + z5^{12},$$
$$11 - 71\,z4 + 11\,z4^2 - 80\,z5 + 330\,z4\,z5 + 258\,z5^2 - 962\,z4\,z5^2 - 611\,z5^3 + 1975\,z4\,z5^3 + 962\,z5^4 - 2909\,z4\,z5^4 - 1183\,z5^5 + 3416\,z4\,z5^5 + 1204\,z5^6 - 3360\,z4\,z5^6 - 1062\,z5^7 + 2778\,z4\,z5^7 + 720\,z5^8 - 1776\,z4\,z5^8 - 369\,z5^9 + 853\,z4\,z5^9 + 126\,z5^{10} - 275\,z4\,z5^{10} - 25\,z5^{11} + 50\,z4\,z5^{11},$$
$$-71 + 11\,z3 + 11\,z4 + 330\,z5 - 962\,z5^2 + 1975\,z5^3 - 2909\,z5^4 + 3416\,z5^5 - 3360\,z5^6 + 2778\,z5^7 - 1776\,z5^8 + 853\,z5^9 - 275\,z5^{10} + 50\,z5^{11},\ -1 + z2,$$
$$z1,\ 1872 + 11\,u - 1430\,z4 - 9069\,z5 + 5522\,z4\,z5 + 25467\,z5^2 - 14938\,z4\,z5^2 - 48882\,z5^3 + 25410\,z4\,z5^3 + 69049\,z5^4 - 32582\,z4\,z5^4 - 79033\,z5^5 + 34232\,z4\,z5^5 + 76221\,z5^6 - 31020\,z4\,z5^6 - 60652\,z5^7 + 21428\,z4\,z5^7 + 37303\,z5^8 - 11132\,z4\,z5^8 - 17081\,z5^9 + 3850\,z4\,z5^9 + 5247\,z5^{10} - 770\,z4\,z5^{10} - 884\,z5^{11}\}$$

Endlich viele Lösungen.

```
Map[Variables, GB]
```

{{z5}, {z4, z5}, {z3, z4, z5}, {z2}, {z1}, {u, z4, z5}}

```
univ = GB[[1]] // Factor
```

$$(1 - 2\,z5 + 4\,z5^2 - 3\,z5^3 + z5^4)(1 - 3\,z5 + 4\,z5^2 - 2\,z5^3 + z5^4)(1 - z5 + z5^2 - z5^3 + z5^4)$$

Rücksubstitution

```
L = Solve[univ == 0, z5] // Simplify
```

$$\{\{z5 \to (-1)^{1/5}\}, \{z5 \to -(-1)^{2/5}\}, \{z5 \to (-1)^{3/5}\}, \{z5 \to -(-1)^{4/5}\},$$
$$\{z5 \to \tfrac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\right)\}, \{z5 \to \tfrac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\right)\},$$
$$\{z5 \to \tfrac{1}{4}\left(3 - \sqrt{5} - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)\}, \{z5 \to \tfrac{1}{4}\left(3 - \sqrt{5} + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)\},$$
$$\{z5 \to \tfrac{1}{4}\left(3 + \sqrt{5} - i\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}\right)\}, \{z5 \to \tfrac{1}{4}\left(3 + \sqrt{5} + i\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}\right)\},$$
$$\{z5 \to \tfrac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\right)\}, \{z5 \to \tfrac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\right)\}\}$$

```
Do[
    S = Simplify[Solve[GB[[2]] == 0 /. L[[i]], z4]];
    L[[i]] = Map[Join[L[[i]], #] &, S],
    {i, Length[L]}];
L = Flatten[L, 1];
```

```
Do[
    S = Simplify[Solve[GB[[3]] == 0 /. L[[i]], z3]];
    L[[i]] = Map[Join[L[[i]], #] &, S],
    {i, Length[L]}];
L = Flatten[L, 1];
```

```
Do[
    S = Simplify[Solve[GB[[4]] == 0 /. L[[i]], z2]];
    L[[i]] = Map[Join[L[[i]], #] &, S],
    {i, Length[L]}];
L = Flatten[L, 1];
```

```
Do[
    S = Simplify[Solve[GB[[5]] == 0 /. L[[i]], z1]];
    L[[i]] = Map[Join[L[[i]], #] &, S],
    {i, Length[L]}];
L = Flatten[L, 1];
```

```
L
```

$$\Big\{\Big\{z5 \to (-1)^{1/5},\ z4 \to (-1)^{1/5} - (-1)^{2/5},\ z3 \to \frac{1}{4}\Big(3 - \sqrt{5} + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\Big),\ z2 \to 1,\ z1 \to 0\Big\},$$

$$\Big\{z5 \to (-1)^{1/5},\ z4 \to (-1)^{1/5} - (-1)^{2/5} + (-1)^{3/5},$$
$$z3 \to \frac{1}{2} + \frac{1}{4} i\Big(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{2\,(5 + \sqrt{5})}\Big),\ z2 \to 1,\ z1 \to 0\Big\},\ \Big\{z5 \to -(-1)^{2/5},$$
$$z4 \to 1 - (-1)^{3/5},\ z3 \to \frac{1}{4}\Big(2 - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - i\sqrt{2\,(5 + \sqrt{5})}\Big),\ z2 \to 1,\ z1 \to 0\Big\},$$

$$\Big\{z5 \to -(-1)^{2/5},\ z4 \to 1 - (-1)^{1/5} - (-1)^{3/5},\ z3 \to \frac{1}{4}\Big(3 + \sqrt{5} - i\sqrt{2\,(5 + \sqrt{5})}\Big),\ z2 \to 1,\ z1 \to 0\Big\},$$

$$\Big\{z5 \to (-1)^{3/5},\ z4 \to 1 + (-1)^{2/5},\ z3 \to \frac{1}{2} + \frac{1}{4} i\Big(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{2\,(5 + \sqrt{5})}\Big),\ z2 \to 1,\ z1 \to 0\Big\},$$

$$\Big\{z5 \to (-1)^{3/5},\ z4 \to (-1)^{1/5} + (-1)^{3/5},\ z3 \to \frac{1}{4}\Big(3 + \sqrt{5} + i\sqrt{2\,(5 + \sqrt{5})}\Big),\ z2 \to 1,\ z1 \to 0\Big\},$$

$$\Big\{z5 \to -(-1)^{4/5},\ z4 \to 1 - (-1)^{1/5},$$
$$z3 \to \frac{1}{2} + \frac{1}{4} i\Big(-\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{2\,(5 + \sqrt{5})}\Big),\ z2 \to 1,\ z1 \to 0\Big\},$$

$$\Big\{z5 \to -(-1)^{4/5},\ z4 \to 1 - (-1)^{1/5} + (-1)^{2/5},\ z3 \to \frac{1}{4}\Big(3 - \sqrt{5} - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\Big),\ z2 \to 1,\ z1 \to 0\Big\},$$

$$\Big\{z5 \to \frac{1}{2}\Big(1 - i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\Big),\ z4 \to \frac{1}{4}\Big(2 + i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} + i\sqrt{5\,(5 - 2\sqrt{5})} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\Big),$$
$$z3 \to \frac{1}{4}\Big(2 + i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} + i\sqrt{5\,(5 - 2\sqrt{5})} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\Big),\ z2 \to 1,\ z1 \to 0\Big\},$$

$$\Big\{z5 \to \frac{1}{2}\Big(1 - i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\Big),\ z4 \to \frac{1}{4}\Big(2 + i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} + i\sqrt{5\,(5 - 2\sqrt{5})} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\Big),$$
$$z3 \to \frac{1}{4}\Big(2 + i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} + i\sqrt{5\,(5 - 2\sqrt{5})} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\Big),\ z2 \to 1,\ z1 \to 0\Big\},$$

$$\Big\{z5 \to \frac{1}{2}\Big(1 + i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\Big),\ z4 \to \frac{1}{4}\Big(2 - i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} - i\sqrt{5\,(5 - 2\sqrt{5})} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\Big),$$
$$z3 \to \frac{1}{4}\Big(2 - i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} - i\sqrt{5\,(5 - 2\sqrt{5})} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\Big),\ z2 \to 1,\ z1 \to 0\Big\},$$

$$\Big\{z5 \to \frac{1}{2}\Big(1 + i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\Big),\ z4 \to \frac{1}{4}\Big(2 - i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} - i\sqrt{5\,(5 - 2\sqrt{5})} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\Big),$$
$$z3 \to \frac{1}{4}\Big(2 - i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} - i\sqrt{5\,(5 - 2\sqrt{5})} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\Big),\ z2 \to 1,\ z1 \to 0\Big\},$$

$$\Big\{z5 \to \frac{1}{4}\Big(3 - \sqrt{5} - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\Big),$$

$$z4 \to \frac{1}{16}\left(6+2\sqrt{5}+i\sqrt{50-10\sqrt{5}}-3\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}-4\sqrt{-1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right),$$

$$z3 \to \frac{1}{16}\left(6+2\sqrt{5}+i\sqrt{50-10\sqrt{5}}-3\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}+4\sqrt{-1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right),$$

$$z2 \to 1,\ z1 \to 0\},\ \{z5 \to \frac{1}{4}\left(3-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$z4 \to \frac{1}{16}\left(6+2\sqrt{5}+i\sqrt{50-10\sqrt{5}}-3\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}+4\sqrt{-1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right),$$

$$z3 \to \frac{1}{16}\left(6+2\sqrt{5}+i\sqrt{50-10\sqrt{5}}-3\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}-4\sqrt{-1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right),$$

$$z2 \to 1,\ z1 \to 0\},\ \{z5 \to \frac{1}{4}\left(3-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$z4 \to \frac{1}{16}\left(6+2\sqrt{5}-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}+3\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}-4\sqrt{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right),$$

$$z3 \to \frac{1}{16}\left(6+2\sqrt{5}-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}+3\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}+4\sqrt{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right),$$

$$z2 \to 1,\ z1 \to 0\},\ \{z5 \to \frac{1}{4}\left(3-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$z4 \to \frac{1}{16}\left(6+2\sqrt{5}-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}+3\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}+4\sqrt{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right),$$

$$z3 \to \frac{1}{16}\left(6+2\sqrt{5}-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}+3\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}-4\sqrt{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right),$$

$$z2 \to 1,\ z1 \to 0\},\ \{z5 \to \frac{1}{4}\left(3+\sqrt{5}-i\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}\right),$$

$$z4 \to \frac{1}{16}\left(6-2\sqrt{5}-3\,i\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}-i\sqrt{10\,(5+\sqrt{5})}-4\sqrt{-1+\sqrt{5}-i\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}}\right),$$

$$z3 \to \frac{1}{16}\left(6-2\sqrt{5}-3\,i\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}-i\sqrt{10\,(5+\sqrt{5})}+4\sqrt{-1+\sqrt{5}-i\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}}\right),$$

$$z2 \to 1,\ z1 \to 0\},\ \{z5 \to \frac{1}{4}\left(3+\sqrt{5}-i\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}\right),$$

$$z4 \to \frac{1}{16}\left(6-2\sqrt{5}-3\,i\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}-i\sqrt{10\,(5+\sqrt{5})}+4\sqrt{-1+\sqrt{5}-i\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}}\right),$$

$$z3 \to \frac{1}{16}\left(6-2\sqrt{5}-3\,i\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}-i\sqrt{10\,(5+\sqrt{5})}-4\sqrt{-1+\sqrt{5}-i\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}}\right),$$

$$z2 \to 1,\ z1 \to 0\},\ \{z5 \to \frac{1}{4}\left(3+\sqrt{5}+i\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}\right),$$

$$z4 \to \frac{1}{16}\left(6-2\sqrt{5}+3\,i\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}+i\sqrt{10\,(5+\sqrt{5})}-4\sqrt{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}}\right),$$

$$z3 \to \frac{1}{16}\left(6 - 2\sqrt{5} + 3 i \sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)} + i \sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)} + 4\sqrt{-1+\sqrt{5} + i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}\right),$$

$$z2 \to 1,\ z1 \to 0\},\ \{z5 \to \frac{1}{4}\left(3+\sqrt{5} + i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right),$$

$$z4 \to \frac{1}{16}\left(6 - 2\sqrt{5} + 3 i \sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)} + i \sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)} + 4\sqrt{-1+\sqrt{5} + i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}\right),$$

$$z3 \to \frac{1}{16}\left(6 - 2\sqrt{5} + 3 i \sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)} + i \sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)} - 4\sqrt{-1+\sqrt{5} + i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}\right),$$

$$z2 \to 1,\ z1 \to 0\},\ \{z5 \to \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right),$$

$$z4 \to \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2\left(3+\sqrt{5}\right)} + i\sqrt{5+2\sqrt{5}} - i\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}\right),$$

$$z3 \to \frac{1}{4}\left(2 + \sqrt{2\left(3+\sqrt{5}\right)} + i\sqrt{5+2\sqrt{5}} - i\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}\right),\ z2 \to 1,\ z1 \to 0\},$$

$$\{z5 \to \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right),\ z4 \to \frac{1}{4}\left(2 + \sqrt{2\left(3+\sqrt{5}\right)} + i\sqrt{5+2\sqrt{5}} - i\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}\right),$$

$$z3 \to \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2\left(3+\sqrt{5}\right)} + i\sqrt{5+2\sqrt{5}} - i\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}\right),\ z2 \to 1,\ z1 \to 0\},$$

$$\{z5 \to \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right),\ z4 \to \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2\left(3+\sqrt{5}\right)} - i\sqrt{5+2\sqrt{5}} + i\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}\right),$$

$$z3 \to \frac{1}{4}\left(2 + \sqrt{2\left(3+\sqrt{5}\right)} - i\sqrt{5+2\sqrt{5}} + i\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}\right),\ z2 \to 1,\ z1 \to 0\},$$

$$\{z5 \to \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right),\ z4 \to \frac{1}{4}\left(2 + \sqrt{2\left(3+\sqrt{5}\right)} - i\sqrt{5+2\sqrt{5}} + i\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}\right),$$

$$z3 \to \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2\left(3+\sqrt{5}\right)} - i\sqrt{5+2\sqrt{5}} + i\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}\right),\ z2 \to 1,\ z1 \to 0\}\}$$

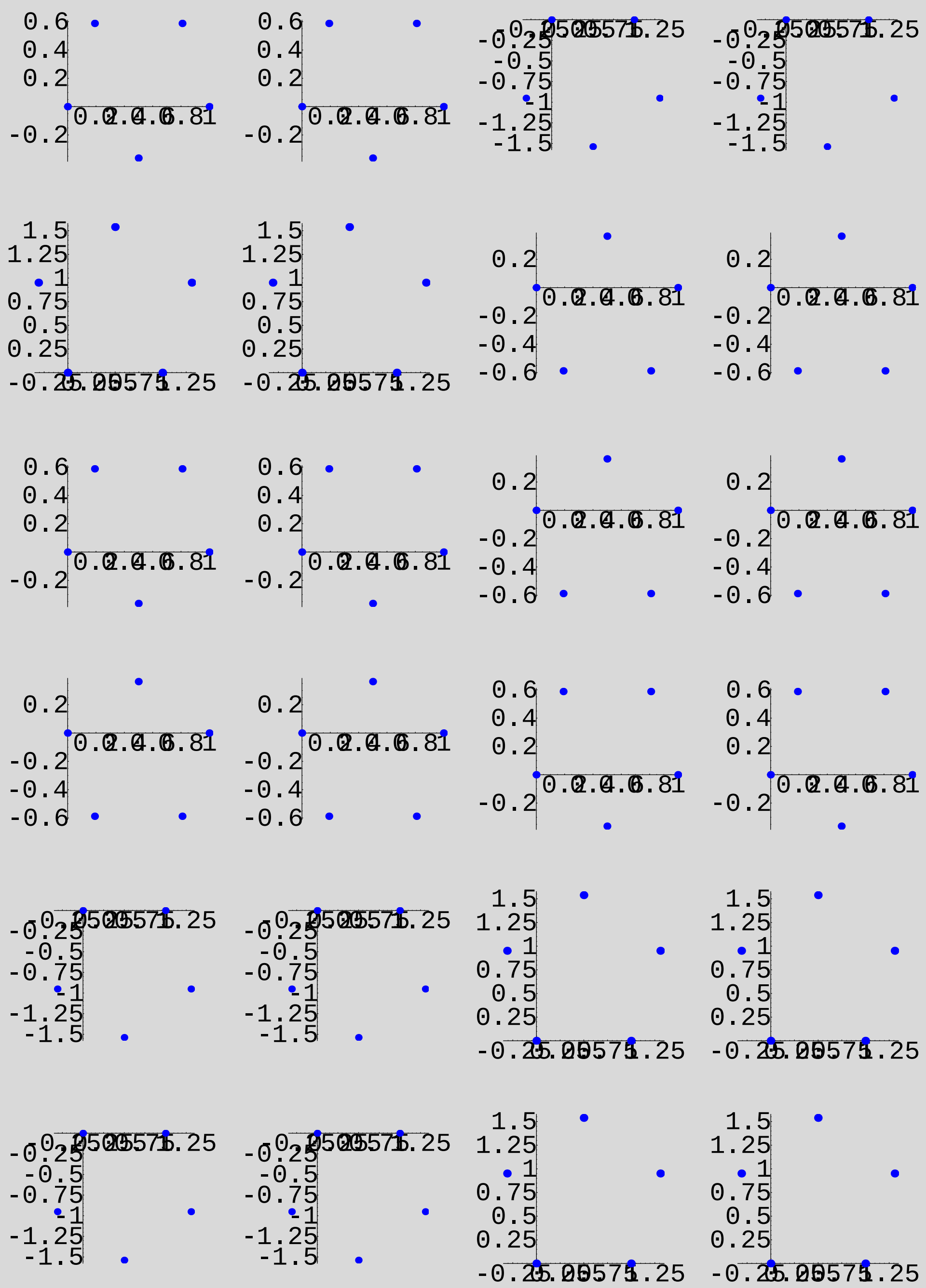
```
N[L]
```

```
{{z5 → 0.809017 + 0.587785 i, z4 → 0.5 − 0.363271 i, z3 → 0.190983 + 0.587785 i,
   z2 → 1., z1 → 0.}, {z5 → 0.809017 + 0.587785 i, z4 → 0.190983 + 0.587785 i,
   z3 → 0.5 − 0.363271 i, z2 → 1., z1 → 0.}, {z5 → −0.309017 − 0.951057 i,
   z4 → 1.30902 − 0.951057 i, z3 → 0.5 − 1.53884 i, z2 → 1., z1 → 0.},
 {z5 → −0.309017 − 0.951057 i, z4 → 0.5 − 1.53884 i, z3 → 1.30902 − 0.951057 i,
   z2 → 1., z1 → 0.}, {z5 → −0.309017 + 0.951057 i, z4 → 1.30902 + 0.951057 i,
   z3 → 0.5 + 1.53884 i, z2 → 1., z1 → 0.}, {z5 → −0.309017 + 0.951057 i,
   z4 → 0.5 + 1.53884 i, z3 → 1.30902 + 0.951057 i, z2 → 1., z1 → 0.},
 {z5 → 0.809017 − 0.587785 i, z4 → 0.190983 − 0.587785 i, z3 → 0.5 + 0.363271 i,
   z2 → 1., z1 → 0.}, {z5 → 0.809017 − 0.587785 i, z4 → 0.5 + 0.363271 i,
   z3 → 0.190983 − 0.587785 i, z2 → 1., z1 → 0.}, {z5 → 0.5 − 0.363271 i,
   z4 → 0.190983 + 0.587785 i, z3 → 0.809017 + 0.587785 i, z2 → 1., z1 → 0.},
 {z5 → 0.5 − 0.363271 i, z4 → 0.809017 + 0.587785 i, z3 → 0.190983 + 0.587785 i,
   z2 → 1., z1 → 0.}, {z5 → 0.5 + 0.363271 i, z4 → 0.190983 − 0.587785 i,
   z3 → 0.809017 − 0.587785 i, z2 → 1., z1 → 0.}, {z5 → 0.5 + 0.363271 i,
   z4 → 0.809017 − 0.587785 i, z3 → 0.190983 − 0.587785 i, z2 → 1., z1 → 0.},
 {z5 → 0.190983 − 0.587785 i, z4 → 0.5 + 0.363271 i, z3 → 0.809017 − 0.587785 i,
   z2 → 1., z1 → 0.}, {z5 → 0.190983 − 0.587785 i, z4 → 0.809017 − 0.587785 i,
   z3 → 0.5 + 0.363271 i, z2 → 1., z1 → 0.}, {z5 → 0.190983 + 0.587785 i,
   z4 → 0.5 − 0.363271 i, z3 → 0.809017 + 0.587785 i, z2 → 1., z1 → 0.},
 {z5 → 0.190983 + 0.587785 i, z4 → 0.809017 + 0.587785 i, z3 → 0.5 − 0.363271 i,
   z2 → 1., z1 → 0.}, {z5 → 1.30902 − 0.951057 i, z4 → −0.309017 − 0.951057 i,
   z3 → 0.5 − 1.53884 i, z2 → 1., z1 → 0.}, {z5 → 1.30902 − 0.951057 i,
   z4 → 0.5 − 1.53884 i, z3 → −0.309017 − 0.951057 i, z2 → 1., z1 → 0.},
 {z5 → 1.30902 + 0.951057 i, z4 → −0.309017 + 0.951057 i, z3 → 0.5 + 1.53884 i,
   z2 → 1., z1 → 0.}, {z5 → 1.30902 + 0.951057 i, z4 → 0.5 + 1.53884 i,
   z3 → −0.309017 + 0.951057 i, z2 → 1., z1 → 0.}, {z5 → 0.5 − 1.53884 i,
   z4 → −0.309017 − 0.951057 i, z3 → 1.30902 − 0.951057 i, z2 → 1., z1 → 0.},
 {z5 → 0.5 − 1.53884 i, z4 → 1.30902 − 0.951057 i, z3 → −0.309017 − 0.951057 i,
   z2 → 1., z1 → 0.}, {z5 → 0.5 + 1.53884 i, z4 → −0.309017 + 0.951057 i,
   z3 → 1.30902 + 0.951057 i, z2 → 1., z1 → 0.}, {z5 → 0.5 + 1.53884 i,
   z4 → 1.30902 + 0.951057 i, z3 → −0.309017 + 0.951057 i, z2 → 1., z1 → 0.}}
```

```
graph = Map[Point, {z1, z2, z3, z4, z5}] /. N[L] /.
      {Complex[x_, y_] → {x, y}, Point[x_Real] → Point[{x, 0}]};
```

```
t = Table[Graphics[Join[{PointSize[0.05], RGBColor[0, 0, 1]}, graph[[i]]],
        Axes → True, AspectRatio → Automatic], {i, 1, Length[graph]}];
```

```
Show[GraphicsArray[Partition[t, 4]]];
```



- Die Lösungen stellen immer ein regelmäßiges 5-Eck dar.

```
FindRoot[M[{z1, z2, z3, z4, z5}], {{u, 15}, {z1, 0}, {z2, 1}, {z3, 1}, {z4, 0}, {z5, 0}}]
```

FindRoot::nveq : The number of equations does not match the number of variables in FindRoot[M[{z1, z2, z3, z4, z5}], {{u, 15}, {z1, 0}, {z2, 1}, {z3, 1}, {z4, 0}, {z5, 0}}]. More…

```
FindRoot[M[{z1, z2, z3, z4, z5}], {{u, 15}, {z1, 0}, {z2, 1}, {z3, 1}, {z4, 0}, {z5, 0}}]
```

Analyse Biochemischer Reaktions-Netzwerke

- Führt auf Gleichungssysteme der Form

$$\begin{aligned}
&k1\, e\, A - k2\, EA - (k3\, EA\, B - k4\, EAB) == 0,\\
&k3\, EA\, B - k4\, EAB - (k5\, EAB - k6\, EPQ) == 0,\\
&k5\, EAB - k6\, EPQ - (k7\, EPQ - k8\, EP\, Q) == 0,\\
&k7\, EPQ - k8\, EP\, Q - (k9\, EP - k10\, e) == 0,\\
&v - (k9\, EP - k10\, e) == 0,\\
&e + EA + EAB + EPQ + EP - E0 == 0
\end{aligned}$$

— Gesucht ist *v* in Abhängigkeit von *e*, EA, EAB, EPQ, EP.

Lösung

- Zuerst ein kleineres Netzwerk:

```
G = {k1 (E0 – EA) A – k2 EA – (k3 EA – k4 (E0 – EA) P),
      v – (k3 EA – k4 (E0 – EA) P)};
```

— Gesucht ist *v* in Abhängigkeit von EA. Die anderen “Variablen” als Parameter.

```
GB = GroebnerBasis[G, {EA, v}]
```

```
{–A E0 k1 k3 + E0 k2 k4 P + A k1 v + k2 v + k3 v + k4 P v,
  EA k3 – E0 k4 P + EA k4 P – v, –A E0 k1 + A EA k1 + EA k2 + v}
```

```
Solve[GB[[1]] == 0, v]
```

$$\left\{\left\{v \to \frac{A\, E0\, k1\, k3 - E0\, k2\, k4\, P}{A\, k1 + k2 + k3 + k4\, P}\right\}\right\}$$

```
Simplify[%]
```

$$\left\{\left\{v \to \frac{E0\,(A\, k1\, k3 - k2\, k4\, P)}{A\, k1 + k2 + k3 + k4\, P}\right\}\right\}$$

Die Lösung *v* beschreibt die Änderungsrate der Reaktion in Abhängigkeit vom Anfangsprodukt *A* und Endprodukt *P* und der Total-Enzymmenge E0.

Eigentlich sind die Gleichungen alle linear in *v* und EA, Gauss würde ausreichen.

$$\text{LinearSolve}\left[\begin{pmatrix} -k1\, A - k2 - k3 - k4\, P & 0 \\ -k3 - k4\, P & 1 \end{pmatrix}, \{-k1\, E0\, A - k4\, E0\, P, -k4\, E0\, P\}\right]$$

$$\left\{\frac{A\, E0\, k1 + E0\, k4\, P}{A\, k1 + k2 + k3 + k4\, P}, \frac{A\, E0\, k1\, k3 - E0\, k2\, k4\, P}{A\, k1 + k2 + k3 + k4\, P}\right\}$$

- Kompliziertere Reaktion

```
G = {k1 e A – k2 EA – (k3 EA B – k4 EAB),
      k3 EA B – k4 EAB – (k5 EAB – k6 EPQ),
      k5 EAB – k6 EPQ – (k7 EPQ – k8 EP Q),
      k7 EPQ – k8 EP Q – (k9 EP – k10 e),
      v – (k9 EP – k10 e P),
      e + EA + EAB + EPQ + EP – E0};
```

```
GB = GroebnerBasis[G, {e, EA, EAB, EPQ, EP, v}]
```

```
{–E0 k10 k2 k4 k6 k9 – E0 k10 k2 k4 k7 k9 – E0 k10 k2 k5 k7 k9 – A B E0 k1 k3 k5 k7 k9 –
   B E0 k10 k3 k5 k7 k9 + E0 k10 k2 k4 k6 k9 P + E0 k10 k2 k4 k7 k9 P + E0 k10 k2 k5 k7 k9 P +
   B E0 k10 k3 k5 k7 k9 P + E0 k10 k2 k4 k6 k8 P Q + k10 k2 k4 k6 v + k10 k2 k4 k7 v +
   k10 k2 k5 k7 v + A B k1 k3 k5 k7 v + B k10 k3 k5 k7 v + A B k1 k3 k5 k9 v + A B k1 k3 k6 k9 v +
   A k1 k4 k6 k9 v + k2 k4 k6 k9 v + A B k1 k3 k7 k9 v + A k1 k4 k7 k9 v + k2 k4 k7 k9 v +
   A k1 k5 k7 k9 v + k2 k5 k7 k9 v + B k3 k5 k7 k9 v + k10 k2 k4 k8 Q v + k10 k2 k5 k8 Q v +
   A B k1 k3 k5 k8 Q v + B k10 k3 k5 k8 Q v + k10 k2 k6 k8 Q v + A B k1 k3 k6 k8 Q v +
   B k10 k3 k6 k8 Q v + A k1 k4 k6 k8 Q v + k10 k4 k6 k8 Q v + k2 k4 k6 k8 Q v,
 –B EP k10 k3 k5 k9 – B EP k10 k3 k6 k9 – EP k10 k4 k6 k9 – B EP k10 k3 k7 k9 –
   EP k10 k4 k7 k9 – EP k10 k5 k7 k9 + B EP k3 k5 k7 k9 – B E0 k10 k3 k5 k7 P +
   B EP k10 k3 k5 k7 P + B EP k10 k3 k5 k9 P + B EP k10 k3 k6 k9 P + EP k10 k4 k6 k9 P +
   B EP k10 k3 k7 k9 P + EP k10 k4 k7 k9 P + EP k10 k5 k7 k9 P + B EP k10 k3 k5 k8 P Q +
   B EP k10 k3 k6 k8 P Q + EP k10 k4 k6 k8 P Q + B k10 k3 k5 v + B k10 k3 k6 v +
   k10 k4 k6 v + B k10 k3 k7 v + k10 k4 k7 v + k10 k5 k7 v – B k3 k5 k7 v,
 –EP k10 k2 k5 k9 – EP k10 k2 k6 k9 – EP k10 k2 k7 k9 + A EP k1 k5 k7 k9 +
   EP k10 k5 k7 k9 + EP k2 k5 k7 k9 – E0 k10 k2 k5 k7 P + EP k10 k2 k5 k7 P +
   EP k10 k2 k5 k9 P + EP k10 k2 k6 k9 P + EP k10 k2 k7 k9 P –
   EP k10 k5 k7 k9 P + EP k10 k2 k5 k8 P Q + EP k10 k2 k6 k8 P Q + k10 k2 k5 v +
   k10 k2 k6 v + k10 k2 k7 v – A k1 k5 k7 v – k10 k5 k7 v – k2 k5 k7 v,
 –EP k10 k2 k4 k9 + EP k10 k2 k7 k9 + A B EP k1 k3 k7 k9 + B EP k10 k3 k7 k9 +
   A EP k1 k4 k7 k9 + EP k10 k4 k7 k9 + EP k2 k4 k7 k9 – E0 k10 k2 k4 k7 P +
   EP k10 k2 k4 k7 P + EP k10 k2 k4 k9 P – EP k10 k2 k7 k9 P – B EP k10 k3 k7 k9 P –
   EP k10 k4 k7 k9 P + EP k10 k2 k4 k8 P Q + k10 k2 k4 v – k10 k2 k7 v –
   A B k1 k3 k7 v – B k10 k3 k7 v – A k1 k4 k7 v – k10 k4 k7 v – k2 k4 k7 v,
 EP k10 k2 k4 k9 + EP k10 k2 k5 k9 + A B EP k1 k3 k5 k9 + B EP k10 k3 k5 k9 +
   EP k10 k2 k6 k9 + A B EP k1 k3 k6 k9 + B EP k10 k3 k6 k9 + A EP k1 k4 k6 k9 +
   EP k10 k4 k6 k9 + EP k2 k4 k6 k9 – E0 k10 k2 k4 k6 P + EP k10 k2 k4 k6 P –
   EP k10 k2 k4 k9 P – EP k10 k2 k5 k9 P – B EP k10 k3 k5 k9 P –
   EP k10 k2 k6 k9 P – B EP k10 k3 k6 k9 P – EP k10 k4 k6 k9 P –
   k10 k2 k4 v – k10 k2 k5 v – A B k1 k3 k5 v – B k10 k3 k5 v – k10 k2 k6 v –
   A B k1 k3 k6 v – B k10 k3 k6 v – A k1 k4 k6 v – k10 k4 k6 v – k2 k4 k6 v,
 –E0 k10 k2 k4 k6 + EP k10 k2 k4 k6 – E0 k10 k2 k4 k7 + EP k10 k2 k4 k7 – E0 k10 k2 k5 k7 +
   EP k10 k2 k5 k7 – A B E0 k1 k3 k5 k7 + A B EP k1 k3 k5 k7 – B E0 k10 k3 k5 k7 +
   B EP k10 k3 k5 k7 – B EP k10 k3 k5 k9 – B EP k10 k3 k6 k9 – EP k10 k4 k6 k9 –
   B EP k10 k3 k7 k9 – EP k10 k4 k7 k9 – EP k10 k5 k7 k9 + B EP k3 k5 k7 k9 +
   E0 k10 k2 k4 k6 P – EP k10 k2 k4 k6 P + E0 k10 k2 k4 k7 P – EP k10 k2 k4 k7 P +
   E0 k10 k2 k5 k7 P – EP k10 k2 k5 k7 P + B EP k10 k3 k5 k9 P + B EP k10 k3 k6 k9 P +
   EP k10 k4 k6 k9 P + B EP k10 k3 k7 k9 P + EP k10 k4 k7 k9 P + EP k10 k5 k7 k9 P +
   EP k10 k2 k4 k8 Q + EP k10 k2 k5 k8 Q + A B EP k1 k3 k5 k8 Q + B EP k10 k3 k5 k8 Q +
   EP k10 k2 k6 k8 Q + A B EP k1 k3 k6 k8 Q + B EP k10 k3 k6 k8 Q + A EP k1 k4 k6 k8 Q +
   EP k10 k4 k6 k8 Q + EP k2 k4 k6 k8 Q – EP k10 k2 k4 k8 P Q – EP k10 k2 k5 k8 P Q –
   EP k10 k2 k6 k8 P Q + A B k1 k3 k5 v + B k10 k3 k5 v + A B k1 k3 k6 v + B k10 k3 k6 v +
   A k1 k4 k6 v + k10 k4 k6 v + k2 k4 k6 v + A B k1 k3 k7 v + B k10 k3 k7 v +
   A k1 k4 k7 v + k10 k4 k7 v + k2 k4 k7 v + A k1 k5 k7 v + k10 k5 k7 v + k2 k5 k7 v,
 EP k9 + EPQ k7 P – EP k9 P – EP k8 P Q – v, –B EP k10 k3 k9 – EP k10 k4 k9 –
   EP k10 k5 k9 + B EP k3 k5 k9 – B E0 k10 k3 k5 P + B EP k10 k3 k5 P +
   B EPQ k10 k3 k5 P + B EPQ k10 k3 k6 P + EPQ k10 k4 k6 P + B EP k10 k3 k9 P +
   EP k10 k4 k9 P + EP k10 k5 k9 P + B k10 k3 v + k10 k4 v + k10 k5 v – B k3 k5 v,
 B E0 k10 k3 k5 – B EP k10 k3 k5 – B EPQ k10 k3 k5 – B EPQ k10 k3 k6 – EPQ k10 k4 k6 –
   B EPQ k10 k3 k7 – EPQ k10 k4 k7 – EPQ k10 k5 k7 + B EPQ k3 k5 k7 – B EP k3 k5 k9 +
   B EP k10 k3 k8 Q + EP k10 k4 k8 Q + EP k10 k5 k8 Q – B EP k3 k5 k8 Q,
 –EP k10 k2 k9 + A EP k1 k5 k9 + EP k10 k5 k9 + EP k2 k5 k9 – E0 k10 k2 k5 P +
   EP k10 k2 k5 P + EPQ k10 k2 k5 P + EPQ k10 k2 k6 P + EP k10 k2 k9 P –
   EP k10 k5 k9 P + k10 k2 v – A k1 k5 v – k10 k5 v – k2 k5 v,
 EP k10 k2 k9 + A B EP k1 k3 k9 + B EP k10 k3 k9 + A EP k1 k4 k9 +
   EP k10 k4 k9 + EP k2 k4 k9 – E0 k10 k2 k4 P + EP k10 k2 k4 P +
   EPQ k10 k2 k4 P – EP k10 k2 k9 P – B EP k10 k3 k9 P – EP k10 k4 k9 P –
   k10 k2 v – A B k1 k3 v – B k10 k3 v – A k1 k4 v – k10 k4 v – k2 k4 v,
 E0 k10 k2 k5 – EP k10 k2 k5 – EPQ k10 k2 k5 – EPQ k10 k2 k6 – EPQ k10 k2 k7 +
   A EPQ k1 k5 k7 + EPQ k10 k5 k7 + EPQ k2 k5 k7 – A EP k1 k5 k9 – EP k2 k5 k9 +
   EP k10 k2 k8 Q – A EP k1 k5 k8 Q – EP k10 k5 k8 Q – EP k2 k5 k8 Q,
 E0 k10 k2 k4 – EP k10 k2 k4 – EPQ k10 k2 k4 + EPQ k10 k2 k7 + A B EPQ k1 k3 k7 +
   B EPQ k10 k3 k7 + A EPQ k1 k4 k7 + EPQ k10 k4 k7 + EPQ k2 k4 k7 –
   A B EP k1 k3 k9 – A EP k1 k4 k9 – EP k2 k4 k9 – EP k10 k2 k8 Q – A B EP k1 k3 k8 Q –
   B EP k10 k3 k8 Q – A EP k1 k4 k8 Q – EP k10 k4 k8 Q – EP k2 k4 k8 Q,
 –E0 k10 k2 k4 + EP k10 k2 k4 + EPQ k10 k2 k4 – E0 k10 k2 k5 + EP k10 k2 k5 +
```

```
   EPQ k10 k2 k5 − A B E0 k1 k3 k5 + A B EP k1 k3 k5 + A B EPQ k1 k3 k5 −
   B E0 k10 k3 k5 + B EP k10 k3 k5 + B EPQ k10 k3 k5 + EPQ k10 k2 k6 +
   A B EPQ k1 k3 k6 + B EPQ k10 k3 k6 + A EPQ k1 k4 k6 + EPQ k10 k4 k6 +
   EPQ k2 k4 k6 + A B EP k1 k3 k9 + A EP k1 k4 k9 + EP k2 k4 k9 + A EP k1 k5 k9 +
   EP k2 k5 k9 + B EP k3 k5 k9, EAB k5 − EPQ k6 − EPQ k7 + EP k8 Q,
 −B E0 k10 k3 + B EAB k10 k3 + B EP k10 k3 + B EPQ k10 k3 + EAB k10 k4 +
   EPQ k10 k7 − B EPQ k3 k7 + B EP k3 k9 − EP k10 k8 Q + B EP k3 k8 Q,
 −E0 k10 k2 + EAB k10 k2 + EP k10 k2 + EPQ k10 k2 − A EPQ k1 k7 − EPQ k10 k7 −
   EPQ k2 k7 + A EP k1 k9 + EP k2 k9 + A EP k1 k8 Q + EP k10 k8 Q + EP k2 k8 Q,
 −A B E0 k1 k3 + A B EAB k1 k3 + A B EP k1 k3 + A B EPQ k1 k3 + A EAB k1 k4 + EAB k2 k4 +
   A EPQ k1 k7 + EPQ k2 k7 + B EPQ k3 k7 − A EP k1 k8 Q − EP k2 k8 Q − B EP k3 k8 Q,
 −E0 k10 + EA k10 + EAB k10 + EP k10 + EPQ k10 − EPQ k7 + EP k9 + EP k8 Q,
 B EA k3 − EAB k4 − EPQ k7 + EP k8 Q,
 −A E0 k1 + A EA k1 + A EAB k1 + A EP k1 + A EPQ k1 + EA k2 + EPQ k7 − EP k8 Q,
 e − E0 + EA + EAB + EP + EPQ}
```

```
Map[Intersection[{e, EA, EAB, EPQ, EP, v}, #] &, Map[Variables, GB]]
```

```
{{v}, {EP, v}, {EP, v}, {EP, v}, {EP, v}, {EP, v}, {EP, EPQ, v}, {EP, EPQ, v}, {EP, EPQ},
 {EP, EPQ, v}, {EP, EPQ, v}, {EP, EPQ}, {EP, EPQ}, {EP, EPQ}, {EAB, EP, EPQ},
 {EAB, EP, EPQ}, {EAB, EP, EPQ}, {EAB, EP, EPQ}, {EA, EAB, EP, EPQ},
 {EA, EAB, EP, EPQ}, {EA, EAB, EP, EPQ}, {e, EA, EAB, EP, EPQ}}
```

```
Solve[GB[[1]] == 0, v]
```

```
{{v → (E0 k10 k2 k4 k6 k9 + E0 k10 k2 k4 k7 k9 + E0 k10 k2 k5 k7 k9 + A B E0 k1 k3 k5 k7 k9 +
        B E0 k10 k3 k5 k7 k9 − E0 k10 k2 k4 k6 k9 P − E0 k10 k2 k4 k7 k9 P −
        E0 k10 k2 k5 k7 k9 P − B E0 k10 k3 k5 k7 k9 P − E0 k10 k2 k4 k6 k8 P Q) /
     (k10 k2 k4 k6 + k10 k2 k4 k7 + k10 k2 k5 k7 + A B k1 k3 k5 k7 + B k10 k3 k5 k7 +
        A B k1 k3 k5 k9 + A B k1 k3 k6 k9 + A k1 k4 k6 k9 + k2 k4 k6 k9 +
        A B k1 k3 k7 k9 + A k1 k4 k7 k9 + k2 k4 k7 k9 + A k1 k5 k7 k9 +
        k2 k5 k7 k9 + B k3 k5 k7 k9 + k10 k2 k4 k8 Q + k10 k2 k5 k8 Q +
        A B k1 k3 k5 k8 Q + B k10 k3 k5 k8 Q + k10 k2 k6 k8 Q + A B k1 k3 k6 k8 Q +
        B k10 k3 k6 k8 Q + A k1 k4 k6 k8 Q + k10 k4 k6 k8 Q + k2 k4 k6 k8 Q)}}
```

Die Lösung v beschreibt die Änderungsrate der Reaktion in Abhängigkeit von den zugeführten A, B und den erzeugten P, Q und der Total-Enzymmenge E0.

Formeln für Impfstoff-Wirksamkeit: Zusammenhänge der Form

- Zusammenhänge bekannt in der Form

$$
\begin{aligned}
&a_7 == n\, v\, q_1\, q_2\, q_3 + n\,(1-v)\, e_1\, e_2\, e_3,\\
&a_6 == n\, v\, q_1\, q_2\,(1-q_3) + n\,(1-v)\, e_1\, e_2\,(1-e_3),\\
&a_5 == n\, v\, q_1\,(1-q_2)\, q_3 + n\,(1-v)\, e_1\,(1-e_2)\, e_3,\\
&a_4 == n\, v\, q_1\,(1-q_2)(1-q_3) + n\,(1-v)\, e_1\,(1-e_2)(1-e_3),\\
&a_3 == n\, v\,(1-q_1)\, q_2\, q_3 + n\,(1-v)(1-e_1)\, e_2\, e_3,\\
&a_2 == n\, v\,(1-q_1)\, q_2\,(1-q_3) + n\,(1-v)(1-e_1)\, e_2\,(1-e_3),\\
&a_1 == n\, v\,(1-q_1)(1-q_2)\, q_3 + n\,(1-v)(1-e_1)(1-e_2)\, e_3,\\
&a_0 == n\, v\,(1-q_1)(1-q_2)(1-q_3) + n\,(1-v)(1-e_1)(1-e_2)(1-e_3)
\end{aligned}
$$

— Gesucht: Formel für v in Abhängigkeit von a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7.

Lösung

$$
\begin{aligned}
\mathrm{G} = \{&-a_7 + n\, v\, q_1\, q_2\, q_3 + n\,(1-v)\, e_1\, e_2\, e_3,\\
&-a_6 + n\, v\, q_1\, q_2\,(1-q_3) + n\,(1-v)\, e_1\, e_2\,(1-e_3),\\
&-a_5 + n\, v\, q_1\,(1-q_2)\, q_3 + n\,(1-v)\, e_1\,(1-e_2)\, e_3,\\
&-a_4 + n\, v\, q_1\,(1-q_2)(1-q_3) + n\,(1-v)\, e_1\,(1-e_2)(1-e_3),\\
&-a_3 + n\, v\,(1-q_1)\, q_2\, q_3 + n\,(1-v)(1-e_1)\, e_2\, e_3,\\
&-a_2 + n\, v\,(1-q_1)\, q_2\,(1-q_3) + n\,(1-v)(1-e_1)\, e_2\,(1-e_3),\\
&-a_1 + n\, v\,(1-q_1)(1-q_2)\, q_3 + n\,(1-v)(1-e_1)(1-e_2)\, e_3,\\
&-a_0 + n\, v\,(1-q_1)(1-q_2)(1-q_3) + n\,(1-v)(1-e_1)(1-e_2)(1-e_3)\};
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{elim} = \mathrm{SingularEliminate}[\mathrm{G}, \{n, q_1, q_2, q_3, e_1, e_2, e_3\}, \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}]
$$

$$
\begin{aligned}
\{&a_1^2\, a_2^2\, a_4^2 - a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4^2 + a_1^2\, a_2\, a_3\, a_4^2 + a_1\, a_2^2\, a_3\, a_4^2 + (v - v^2)\, a_0^2\, a_3^2\, a_4^2 +\\
&(-1 + 2v - 2v^2)\, a_0\, a_1\, a_3^2\, a_4^2 + (v - v^2)\, a_1^2\, a_3^2\, a_4^2 + (-1 + 2v - 2v^2)\, a_0\, a_2\, a_3^2\, a_4^2 +\\
&(1 + 2v - 2v^2)\, a_1\, a_2\, a_3^2\, a_4^2 + (v - v^2)\, a_2^2\, a_3^2\, a_4^2 + (-1 + 2v - 2v^2)\, a_0\, a_3^3\, a_4^2 +\\
&(2v - 2v^2)\, a_1\, a_3^3\, a_4^2 + (2v - 2v^2)\, a_2\, a_3^3\, a_4^2 + (v - v^2)\, a_3^4\, a_4^2 - a_1\, a_2\, a_3\, a_4^3 +\\
&(2v - 2v^2)\, a_0\, a_3^2\, a_4^3 + (-1 + 2v - 2v^2)\, a_1\, a_3^2\, a_4^3 + (-1 + 2v - 2v^2)\, a_2\, a_3^2\, a_4^3 +\\
&(-1 + 2v - 2v^2)\, a_3^3\, a_4^3 + (v - v^2)\, a_3^2\, a_4^4 - a_0\, a_1\, a_2^2\, a_4\, a_5 + a_1^2\, a_2^2\, a_4\, a_5 -\\
&a_1\, a_2^3\, a_4\, a_5 + (1 - 2v + 2v^2)\, a_0^2\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 + (-2 - 4v + 4v^2)\, a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 +\\
&(1 - 2v + 2v^2)\, a_1^2\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 + (1 - 4v + 4v^2)\, a_0\, a_2^2\, a_3\, a_4\, a_5 +\\
&(-4v + 4v^2)\, a_1\, a_2^2\, a_3\, a_4\, a_5 + (-2v + 2v^2)\, a_2^3\, a_3\, a_4\, a_5 + a_0^2\, a_3^2\, a_4\, a_5 -\\
&a_0\, a_1\, a_3^2\, a_4\, a_5 + (-4v + 4v^2)\, a_0\, a_2\, a_3^2\, a_4\, a_5 + (1 - 4v + 4v^2)\, a_1\, a_2\, a_3^2\, a_4\, a_5 +\\
&(-4v + 4v^2)\, a_2^2\, a_3^2\, a_4\, a_5 - a_0\, a_3^3\, a_4\, a_5 + (-2v + 2v^2)\, a_2\, a_3^3\, a_4\, a_5 + a_1\, a_2^2\, a_4^2\, a_5 +\\
&(1 - 4v + 4v^2)\, a_0\, a_2\, a_3\, a_4^2\, a_5 + (-4v + 4v^2)\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4^2\, a_5 + (2 - 4v + 4v^2)\, a_2^2\, a_3\, a_4^2\, a_5 +\\
&(1 + 2v - 2v^2)\, a_0\, a_3^2\, a_4^2\, a_5 + (-1 + 2v - 2v^2)\, a_1\, a_3^2\, a_4^2\, a_5 + (1 - 2v + 2v^2)\, a_2\, a_3^2\, a_4^2\, a_5 +\\
&(-1 + 2v - 2v^2)\, a_3^3\, a_4^2\, a_5 + (-2v + 2v^2)\, a_2\, a_3\, a_4^3\, a_5 + (2v - 2v^2)\, a_3^2\, a_4^3\, a_5 +\\
&(v - v^2)\, a_0^2\, a_2^2\, a_5^2 + (-1 + 2v - 2v^2)\, a_0\, a_1\, a_2^2\, a_5^2 + (v - v^2)\, a_1^2\, a_2^2\, a_5^2 + (2v - 2v^2)\, a_0\, a_2^3\, a_5^2 +\\
&(-1 + 2v - 2v^2)\, a_1\, a_2^3\, a_5^2 + (v - v^2)\, a_2^4\, a_5^2 + a_0^2\, a_2\, a_3\, a_5^2 - a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_5^2 +\\
&(1 + 2v - 2v^2)\, a_0\, a_2^2\, a_3\, a_5^2 + (-1 + 2v - 2v^2)\, a_1\, a_2^2\, a_3\, a_5^2 + (2v - 2v^2)\, a_2^3\, a_3\, a_5^2 +\\
&a_0^2\, a_3^2\, a_5^2 + a_0\, a_2\, a_3^2\, a_5^2 + (v - v^2)\, a_2^2\, a_3^2\, a_5^2 + (-1 + 2v - 2v^2)\, a_0\, a_2^2\, a_4\, a_5^2 +\\
&(1 + 2v - 2v^2)\, a_1\, a_2^2\, a_4\, a_5^2 + (-1 + 2v - 2v^2)\, a_2^3\, a_4\, a_5^2 + (-4v + 4v^2)\, a_0\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5^2 +\\
&(1 - 4v + 4v^2)\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5^2 + (1 - 2v + 2v^2)\, a_2^2\, a_3\, a_4\, a_5^2 + a_0\, a_3^2\, a_4\, a_5^2 +\\
&(2 - 4v + 4v^2)\, a_2\, a_3^2\, a_4\, a_5^2 + (v - v^2)\, a_2^2\, a_4^2\, a_5^2 + (-4v + 4v^2)\, a_2\, a_3\, a_4^2\, a_5^2 + (v - v^2)\, a_3^2\, a_4^2\, a_5^2 +\\
&(-1 + 2v - 2v^2)\, a_0\, a_2^2\, a_5^3 + (2v - 2v^2)\, a_1\, a_2^2\, a_5^3 + (-1 + 2v - 2v^2)\, a_2^3\, a_5^3 - a_0\, a_2\, a_3\, a_5^3 +\\
&(-1 + 2v - 2v^2)\, a_2^2\, a_3\, a_5^3 + (2v - 2v^2)\, a_2^2\, a_4\, a_5^3 + (-2v + 2v^2)\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5^3 +\\
&(v - v^2)\, a_2^2\, a_5^4 - a_0\, a_1^2\, a_2\, a_4\, a_6 - a_1^3\, a_2\, a_4\, a_6 + a_1^2\, a_2^2\, a_4\, a_6 + (1 - 2v + 2v^2)\, a_0^2\, a_1\, a_3\, a_4\, a_6 +
\end{aligned}
$$

$$\left(1-4v+4v^2\right) a_0 a_1^2 a_3 a_4 a_6+\left(-2v+2v^2\right) a_1^3 a_3 a_4 a_6+\left(-2-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_6+$$
$$\left(-4v+4v^2\right) a_1^2 a_2 a_3 a_4 a_6+\left(1-2v+2v^2\right) a_1 a_2^2 a_3 a_4 a_6+a_0^2 a_3^2 a_4 a_6+$$
$$\left(-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_3^2 a_4 a_6+\left(-4v+4v^2\right) a_1^2 a_3^2 a_4 a_6-a_0 a_2 a_3^2 a_4 a_6+$$
$$\left(1-4v+4v^2\right) a_1 a_2 a_3^2 a_4 a_6-a_0 a_3^3 a_4 a_6+\left(-2v+2v^2\right) a_1 a_3^3 a_4 a_6+a_1^2 a_2 a_4^2 a_6+$$
$$\left(1-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_3 a_4^2 a_6+\left(2-4v+4v^2\right) a_1^2 a_3 a_4^2 a_6+\left(-4v+4v^2\right) a_1 a_2 a_3 a_4^2 a_6+$$
$$\left(1+2v-2v^2\right) a_0 a_3^2 a_4^2 a_6+\left(1-2v+2v^2\right) a_1 a_3^2 a_4^2 a_6+\left(-1+2v-2v^2\right) a_2 a_3^2 a_4^2 a_6+$$
$$\left(-1+2v-2v^2\right) a_3^3 a_4^2 a_6+\left(-2v+2v^2\right) a_1 a_3 a_4^3 a_6+\left(2v-2v^2\right) a_3^2 a_4^3 a_6+$$
$$\left(1-2v+2v^2\right) a_0^2 a_1 a_2 a_5 a_6+\left(1-4v+4v^2\right) a_0 a_1^2 a_2 a_5 a_6+\left(-2v+2v^2\right) a_1^3 a_2 a_5 a_6+$$
$$\left(1-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_2^2 a_5 a_6+\left(2-4v+4v^2\right) a_1^2 a_2^2 a_5 a_6+\left(-2v+2v^2\right) a_1 a_2^3 a_5 a_6+$$
$$\left(-1+4v-4v^2\right) a_0^3 a_3 a_5 a_6+\left(-1+8v-8v^2\right) a_0^2 a_1 a_3 a_5 a_6+\left(4v-4v^2\right) a_0 a_1^2 a_3 a_5 a_6+$$
$$\left(-1+8v-8v^2\right) a_0^2 a_2 a_3 a_5 a_6+\left(-2+4v-4v^2\right) a_0 a_1 a_2 a_3 a_5 a_6+$$
$$\left(1-4v+4v^2\right) a_1^2 a_2 a_3 a_5 a_6+\left(4v-4v^2\right) a_0 a_2^2 a_3 a_5 a_6+\left(1-4v+4v^2\right) a_1 a_2^2 a_3 a_5 a_6+$$
$$\left(8v-8v^2\right) a_0^2 a_3^2 a_5 a_6+\left(-1+8v-8v^2\right) a_0 a_1 a_3^2 a_5 a_6+\left(-1+8v-8v^2\right) a_0 a_2 a_3^2 a_5 a_6+$$
$$\left(1-2v+2v^2\right) a_1 a_2 a_3^2 a_5 a_6+\left(-1+4v-4v^2\right) a_0 a_3^3 a_5 a_6+$$
$$\left(-2-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_2 a_4 a_5 a_6+\left(-4v+4v^2\right) a_1^2 a_2 a_4 a_5 a_6+\left(-4v+4v^2\right) a_1 a_2^2 a_4 a_5 a_6+$$
$$\left(-1+8v-8v^2\right) a_0^2 a_3 a_4 a_5 a_6+\left(-2+4v-4v^2\right) a_0 a_1 a_3 a_4 a_5 a_6+$$
$$\left(1-4v+4v^2\right) a_1^2 a_3 a_4 a_5 a_6+\left(-2+4v-4v^2\right) a_0 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6+$$
$$\left(-2-12v+12v^2\right) a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6+\left(1-4v+4v^2\right) a_2^2 a_3 a_4 a_5 a_6+$$
$$\left(8v-8v^2\right) a_0 a_3^2 a_4 a_5 a_6+\left(-4v+4v^2\right) a_1 a_3^2 a_4 a_5 a_6+\left(-4v+4v^2\right) a_2 a_3^2 a_4 a_5 a_6-$$
$$a_3^3 a_4 a_5 a_6+\left(1-2v+2v^2\right) a_1 a_2 a_4^2 a_5 a_6+\left(4v-4v^2\right) a_0 a_3 a_4^2 a_5 a_6+$$
$$\left(1-4v+4v^2\right) a_1 a_3 a_4^2 a_5 a_6+\left(1-4v+4v^2\right) a_2 a_3 a_4^2 a_5 a_6+\left(1+2v-2v^2\right) a_3^2 a_4^2 a_5 a_6+$$
$$a_0^2 a_2 a_5^2 a_6+\left(-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_2 a_5^2 a_6+\left(-4v+4v^2\right) a_1^2 a_2 a_5^2 a_6+$$
$$\left(1+2v-2v^2\right) a_0 a_2^2 a_5^2 a_6+\left(1-2v+2v^2\right) a_1 a_2^2 a_5^2 a_6+\left(2v-2v^2\right) a_2^3 a_5^2 a_6+$$
$$\left(8v-8v^2\right) a_0^2 a_3 a_5^2 a_6+\left(-1+8v-8v^2\right) a_0 a_1 a_3 a_5^2 a_6+\left(8v-8v^2\right) a_0 a_2 a_3 a_5^2 a_6+$$
$$\left(-4v+4v^2\right) a_1 a_2 a_3 a_5^2 a_6+\left(1+2v-2v^2\right) a_2^2 a_3 a_5^2 a_6+\left(8v-8v^2\right) a_0 a_3^2 a_5^2 a_6+$$
$$a_2 a_3^2 a_5^2 a_6-a_0 a_2 a_4 a_5^2 a_6+\left(1-4v+4v^2\right) a_1 a_2 a_4 a_5^2 a_6+\left(-1+2v-2v^2\right) a_2^2 a_4 a_5^2 a_6+$$
$$\left(-1+8v-8v^2\right) a_0 a_3 a_4 a_5^2 a_6+\left(1-2v+2v^2\right) a_1 a_3 a_4 a_5^2 a_6+\left(-4v+4v^2\right) a_2 a_3 a_4 a_5^2 a_6+$$
$$a_3^2 a_4 a_5^2 a_6-a_0 a_2 a_5^3 a_6+\left(-2v+2v^2\right) a_1 a_2 a_5^3 a_6+\left(-1+2v-2v^2\right) a_2^2 a_5^3 a_6+$$
$$\left(-1+4v-4v^2\right) a_0 a_3 a_5^3 a_6-a_2 a_3 a_5^3 a_6+\left(v-v^2\right) a_0^2 a_1^2 a_6^2+\left(2v-2v^2\right) a_0 a_1^3 a_6^2+$$
$$\left(v-v^2\right) a_1^4 a_6^2+\left(-1+2v-2v^2\right) a_0 a_1^2 a_2 a_6^2+\left(-1+2v-2v^2\right) a_1^3 a_2 a_6^2+$$
$$\left(v-v^2\right) a_1^2 a_2^2 a_6^2+a_0^2 a_1 a_3 a_6^2+\left(1+2v-2v^2\right) a_0 a_1^2 a_3 a_6^2+\left(2v-2v^2\right) a_1^3 a_3 a_6^2-$$
$$a_0 a_1 a_2 a_3 a_6^2+\left(-1+2v-2v^2\right) a_1^2 a_2 a_3 a_6^2+a_0^2 a_3^2 a_6^2+a_0 a_1 a_3^2 a_6^2+$$
$$\left(v-v^2\right) a_1^2 a_3^2 a_6^2+\left(-1+2v-2v^2\right) a_0 a_1^2 a_4 a_6^2+\left(-1+2v-2v^2\right) a_1^3 a_4 a_6^2+$$
$$\left(1+2v-2v^2\right) a_1^2 a_2 a_4 a_6^2+\left(-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_3 a_4 a_6^2+\left(1-2v+2v^2\right) a_1^2 a_3 a_4 a_6^2+$$
$$\left(1-4v+4v^2\right) a_1 a_2 a_3 a_4 a_6^2+a_0 a_3^2 a_4 a_6^2+\left(2-4v+4v^2\right) a_1 a_3^2 a_4 a_6^2+$$
$$\left(v-v^2\right) a_1^2 a_4^2 a_6^2+\left(-4v+4v^2\right) a_1 a_3 a_4^2 a_6^2+\left(v-v^2\right) a_3^2 a_4^2 a_6^2+a_0^2 a_1 a_5 a_6^2+$$
$$\left(1+2v-2v^2\right) a_0 a_1^2 a_5 a_6^2+\left(2v-2v^2\right) a_1^3 a_5 a_6^2+\left(-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_2 a_5 a_6^2+$$
$$\left(1-2v+2v^2\right) a_1^2 a_2 a_5 a_6^2+\left(-4v+4v^2\right) a_1 a_2^2 a_5 a_6^2+\left(8v-8v^2\right) a_0^2 a_3 a_5 a_6^2+$$
$$\left(8v-8v^2\right) a_0 a_1 a_3 a_5 a_6^2+\left(1+2v-2v^2\right) a_1^2 a_3 a_5 a_6^2+\left(-1+8v-8v^2\right) a_0 a_2 a_3 a_5 a_6^2+$$
$$\left(-4v+4v^2\right) a_1 a_2 a_3 a_5 a_6^2+\left(8v-8v^2\right) a_0 a_3^2 a_5 a_6^2+a_1 a_3^2 a_5 a_6^2-a_0 a_1 a_4 a_5 a_6^2+$$
$$\left(-1+2v-2v^2\right) a_1^2 a_4 a_5 a_6^2+\left(1-4v+4v^2\right) a_1 a_2 a_4 a_5 a_6^2+\left(-1+8v-8v^2\right) a_0 a_3 a_4 a_5 a_6^2+$$
$$\left(-4v+4v^2\right) a_1 a_3 a_4 a_5 a_6^2+\left(1-2v+2v^2\right) a_2 a_3 a_4 a_5 a_6^2+a_3^2 a_4 a_5 a_6^2+$$
$$a_0^2 a_5^2 a_6^2+a_0 a_1 a_5^2 a_6^2+\left(v-v^2\right) a_1^2 a_5^2 a_6^2+a_0 a_2 a_5^2 a_6^2+\left(2-4v+4v^2\right) a_1 a_2 a_5^2 a_6^2+$$
$$\left(v-v^2\right) a_2^2 a_5^2 a_6^2+\left(8v-8v^2\right) a_0 a_3 a_5^2 a_6^2+a_1 a_3 a_5^2 a_6^2+a_2 a_3 a_5^2 a_6^2+a_3^2 a_5^2 a_6^2+$$
$$\left(-1+2v-2v^2\right) a_0 a_1^2 a_6^3+\left(-1+2v-2v^2\right) a_1^3 a_6^3+\left(2v-2v^2\right) a_1^2 a_2 a_6^3-a_0 a_1 a_3 a_6^3+$$
$$\left(-1+2v-2v^2\right) a_1^2 a_3 a_6^3+\left(2v-2v^2\right) a_1^2 a_4 a_6^3+\left(-2v+2v^2\right) a_1 a_3 a_4 a_6^3-a_0 a_1 a_5 a_6^3+$$

$$(-1+2v-2v^2)\,a_1^2\,a_5\,a_6^3+(-2v+2v^2)\,a_1\,a_2\,a_5\,a_6^3+(-1+4v-4v^2)\,a_0\,a_3\,a_5\,a_6^3-$$
$$a_1\,a_3\,a_5\,a_6^3+(v-v^2)\,a_1^2\,a_6^4+(4v-4v^2)\,a_0^2\,a_1\,a_2\,a_4\,a_7+(-1+8v-8v^2)\,a_0\,a_1^2\,a_2\,a_4\,a_7+$$
$$(-1+4v-4v^2)\,a_1^3\,a_2\,a_4\,a_7+(-1+8v-8v^2)\,a_0\,a_1\,a_2^2\,a_4\,a_7+(8v-8v^2)\,a_1^2\,a_2^2\,a_4\,a_7+$$
$$(-1+4v-4v^2)\,a_1\,a_2^3\,a_4\,a_7+(-2v+2v^2)\,a_0^3\,a_3\,a_4\,a_7+(1-4v+4v^2)\,a_0^2\,a_1\,a_3\,a_4\,a_7+$$
$$(1-2v+2v^2)\,a_0\,a_1^2\,a_3\,a_4\,a_7+(1-4v+4v^2)\,a_0^2\,a_2\,a_3\,a_4\,a_7+$$
$$(-2+4v-4v^2)\,a_0\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_7+(-1+8v-8v^2)\,a_1^2\,a_2\,a_3\,a_4\,a_7+$$
$$(1-2v+2v^2)\,a_0\,a_2^2\,a_3\,a_4\,a_7+(-1+8v-8v^2)\,a_1\,a_2^2\,a_3\,a_4\,a_7+(2-4v+4v^2)\,a_0^2\,a_3^2\,a_4\,a_7+$$
$$(1-4v+4v^2)\,a_0\,a_1\,a_3^2\,a_4\,a_7+(1-4v+4v^2)\,a_0\,a_2\,a_3^2\,a_4\,a_7+(4v-4v^2)\,a_1\,a_2\,a_3^2\,a_4\,a_7+$$
$$(-2v+2v^2)\,a_0\,a_3^3\,a_4\,a_7+(-1+8v-8v^2)\,a_0\,a_1\,a_2\,a_4^2\,a_7+(8v-8v^2)\,a_1^2\,a_2\,a_4^2\,a_7+$$
$$(8v-8v^2)\,a_1\,a_2^2\,a_4^2\,a_7+(-4v+4v^2)\,a_0^2\,a_3\,a_4^2\,a_7+(-4v+4v^2)\,a_0\,a_1\,a_3\,a_4^2\,a_7+$$
$$a_1^2\,a_3\,a_4^2\,a_7+(-4v+4v^2)\,a_0\,a_2\,a_3\,a_4^2\,a_7+(8v-8v^2)\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4^2\,a_7+a_2^2\,a_3\,a_4^2\,a_7+$$
$$(1-2v+2v^2)\,a_0\,a_3^2\,a_4^2\,a_7+(1+2v-2v^2)\,a_1\,a_3^2\,a_4^2\,a_7+(1+2v-2v^2)\,a_2\,a_3^2\,a_4^2\,a_7+$$
$$(2v-2v^2)\,a_3^3\,a_4^2\,a_7+(-1+4v-4v^2)\,a_1\,a_2\,a_4^3\,a_7+(-2v+2v^2)\,a_0\,a_3\,a_4^3\,a_7-$$
$$a_1\,a_3\,a_4^3\,a_7-a_2\,a_3\,a_4^3\,a_7+(-1+2v-2v^2)\,a_3^2\,a_4^3\,a_7+(-2v+2v^2)\,a_0^3\,a_2\,a_5\,a_7+$$
$$(1-4v+4v^2)\,a_0^2\,a_1\,a_2\,a_5\,a_7+(1-2v+2v^2)\,a_0\,a_1^2\,a_2\,a_5\,a_7+(-4v+4v^2)\,a_0^2\,a_2^2\,a_5\,a_7+$$
$$(-4v+4v^2)\,a_0\,a_1\,a_2^2\,a_5\,a_7+a_1^2\,a_2^2\,a_5\,a_7+(-2v+2v^2)\,a_0\,a_2^3\,a_5\,a_7-$$
$$a_1\,a_2^3\,a_5\,a_7-a_0^3\,a_3\,a_5\,a_7-a_0^2\,a_1\,a_3\,a_5\,a_7+(-4v+4v^2)\,a_0^2\,a_2\,a_3\,a_5\,a_7+$$
$$(-2-4v+4v^2)\,a_0\,a_1\,a_2\,a_3\,a_5\,a_7+(1-4v+4v^2)\,a_0\,a_2^2\,a_3\,a_5\,a_7-a_1\,a_2^2\,a_3\,a_5\,a_7+$$
$$a_0^2\,a_3^2\,a_5\,a_7+(1-2v+2v^2)\,a_0\,a_2\,a_3^2\,a_5\,a_7+(1-4v+4v^2)\,a_0^2\,a_2\,a_4\,a_5\,a_7+$$
$$(-2+4v-4v^2)\,a_0\,a_1\,a_2\,a_4\,a_5\,a_7+(-1+8v-8v^2)\,a_1^2\,a_2\,a_4\,a_5\,a_7+$$
$$(-4v+4v^2)\,a_0\,a_2^2\,a_4\,a_5\,a_7+(8v-8v^2)\,a_1\,a_2^2\,a_4\,a_5\,a_7-a_2^3\,a_4\,a_5\,a_7+$$
$$(-4v+4v^2)\,a_0^2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_7+(-2-4v+4v^2)\,a_0\,a_1\,a_3\,a_4\,a_5\,a_7+$$
$$(-2-12v+12v^2)\,a_0\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_7+(-2+4v-4v^2)\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_7+$$
$$(-4v+4v^2)\,a_2^2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_7+(-4v+4v^2)\,a_0\,a_3^2\,a_4\,a_5\,a_7+(1-4v+4v^2)\,a_2\,a_3^2\,a_4\,a_5\,a_7+$$
$$(1-2v+2v^2)\,a_0\,a_2\,a_4^2\,a_5\,a_7+(-1+8v-8v^2)\,a_1\,a_2\,a_4^2\,a_5\,a_7+a_2^2\,a_4^2\,a_5\,a_7+$$
$$(1-4v+4v^2)\,a_0\,a_3\,a_4^2\,a_5\,a_7-a_1\,a_3\,a_4^2\,a_5\,a_7+(-4v+4v^2)\,a_2\,a_3\,a_4^2\,a_5\,a_7+$$
$$(-1+2v-2v^2)\,a_3^2\,a_4^2\,a_5\,a_7+(2-4v+4v^2)\,a_0^2\,a_2\,a_5^2\,a_7+(1-4v+4v^2)\,a_0\,a_1\,a_2\,a_5^2\,a_7+$$
$$(1-2v+2v^2)\,a_0\,a_2^2\,a_5^2\,a_7+(1+2v-2v^2)\,a_1\,a_2^2\,a_5^2\,a_7+(-1+2v-2v^2)\,a_2^3\,a_5^2\,a_7+$$
$$a_0^2\,a_3\,a_5^2\,a_7+(-4v+4v^2)\,a_0\,a_2\,a_3\,a_5^2\,a_7+(-1+2v-2v^2)\,a_2^2\,a_3\,a_5^2\,a_7+$$
$$(1-4v+4v^2)\,a_0\,a_2\,a_4\,a_5^2\,a_7+(4v-4v^2)\,a_1\,a_2\,a_4\,a_5^2\,a_7+(1+2v-2v^2)\,a_2^2\,a_4\,a_5^2\,a_7+$$
$$(1-2v+2v^2)\,a_0\,a_3\,a_4\,a_5^2\,a_7+(1-4v+4v^2)\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5^2\,a_7+$$
$$(-2v+2v^2)\,a_0\,a_2\,a_5^3\,a_7+(2v-2v^2)\,a_2^2\,a_5^3\,a_7+(-2v+2v^2)\,a_0^3\,a_1\,a_6\,a_7+$$
$$(-4v+4v^2)\,a_0^2\,a_1^2\,a_6\,a_7+(-2v+2v^2)\,a_0\,a_1^3\,a_6\,a_7+(1-4v+4v^2)\,a_0^2\,a_1\,a_2\,a_6\,a_7+$$
$$(-4v+4v^2)\,a_0\,a_1^2\,a_2\,a_6\,a_7-a_1^3\,a_2\,a_6\,a_7+(1-2v+2v^2)\,a_0\,a_1\,a_2^2\,a_6\,a_7+a_1^2\,a_2^2\,a_6\,a_7-$$
$$a_0^3\,a_3\,a_6\,a_7+(-4v+4v^2)\,a_0^2\,a_1\,a_3\,a_6\,a_7+(1-4v+4v^2)\,a_0\,a_1^2\,a_3\,a_6\,a_7-$$
$$a_0^2\,a_2\,a_3\,a_6\,a_7+(-2-4v+4v^2)\,a_0\,a_1\,a_2\,a_3\,a_6\,a_7-a_1^2\,a_2\,a_3\,a_6\,a_7+$$
$$a_0^2\,a_3^2\,a_6\,a_7+(1-2v+2v^2)\,a_0\,a_1\,a_3^2\,a_6\,a_7+(1-4v+4v^2)\,a_0^2\,a_1\,a_4\,a_6\,a_7+$$
$$(-4v+4v^2)\,a_0\,a_1^2\,a_4\,a_6\,a_7-a_1^3\,a_4\,a_6\,a_7+(-2+4v-4v^2)\,a_0\,a_1\,a_2\,a_4\,a_6\,a_7+$$
$$(8v-8v^2)\,a_1^2\,a_2\,a_4\,a_6\,a_7+(-1+8v-8v^2)\,a_1\,a_2^2\,a_4\,a_6\,a_7+(-4v+4v^2)\,a_0^2\,a_3\,a_4\,a_6\,a_7+$$
$$(-2-12v+12v^2)\,a_0\,a_1\,a_3\,a_4\,a_6\,a_7+(-4v+4v^2)\,a_1^2\,a_3\,a_4\,a_6\,a_7+$$
$$(-2-4v+4v^2)\,a_0\,a_2\,a_3\,a_4\,a_6\,a_7+(-2+4v-4v^2)\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_6\,a_7+$$
$$(-4v+4v^2)\,a_0\,a_3^2\,a_4\,a_6\,a_7+(1-4v+4v^2)\,a_1\,a_3^2\,a_4\,a_6\,a_7+(1-2v+2v^2)\,a_0\,a_1\,a_4^2\,a_6\,a_7+$$
$$a_1^2\,a_4^2\,a_6\,a_7+(-1+8v-8v^2)\,a_1\,a_2\,a_4^2\,a_6\,a_7+(1-4v+4v^2)\,a_0\,a_3\,a_4^2\,a_6\,a_7+$$
$$(-4v+4v^2)\,a_1\,a_3\,a_4^2\,a_6\,a_7-a_2\,a_3\,a_4^2\,a_6\,a_7+(-1+2v-2v^2)\,a_3^2\,a_4^2\,a_6\,a_7-a_0^3\,a_5\,a_6\,a_7+$$
$$(-4v+4v^2)\,a_0^2\,a_1\,a_5\,a_6\,a_7+(1-4v+4v^2)\,a_0\,a_1^2\,a_5\,a_6\,a_7+(-4v+4v^2)\,a_0^2\,a_2\,a_5\,a_6\,a_7+$$
$$(-2-12v+12v^2)\,a_0\,a_1\,a_2\,a_5\,a_6\,a_7+(-4v+4v^2)\,a_1^2\,a_2\,a_5\,a_6\,a_7+$$

$\left(1-4v+4v^2\right) a_0 a_2^2 a_5 a_6 a_7 + \left(-4v+4v^2\right) a_1 a_2^2 a_5 a_6 a_7 + \left(8v-8v^2\right) a_0^2 a_3 a_5 a_6 a_7 +$
$\left(-2+4v-4v^2\right) a_0 a_1 a_3 a_5 a_6 a_7 + \left(-2+4v-4v^2\right) a_0 a_2 a_3 a_5 a_6 a_7 +$
$\left(-2-4v+4v^2\right) a_1 a_2 a_3 a_5 a_6 a_7 + \left(-1+8v-8v^2\right) a_0 a_3^2 a_5 a_6 a_7 - a_0^2 a_4 a_5 a_6 a_7 +$
$\left(-2-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_4 a_5 a_6 a_7 - a_1^2 a_4 a_5 a_6 a_7 + \left(-2-4v+4v^2\right) a_0 a_2 a_4 a_5 a_6 a_7 +$
$\left(-2+4v-4v^2\right) a_1 a_2 a_4 a_5 a_6 a_7 - a_2^2 a_4 a_5 a_6 a_7 + \left(-2+4v-4v^2\right) a_0 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 +$
$\left(-2-4v+4v^2\right) a_1 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 + \left(-2-4v+4v^2\right) a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 - a_3^2 a_4 a_5 a_6 a_7 +$
$a_0^2 a_5^2 a_6 a_7 + \left(1-2v+2v^2\right) a_0 a_1 a_5^2 a_6 a_7 + \left(-4v+4v^2\right) a_0 a_2 a_5^2 a_6 a_7 +$
$\left(1-4v+4v^2\right) a_1 a_2 a_5^2 a_6 a_7 + \left(-1+2v-2v^2\right) a_2^2 a_5^2 a_6 a_7 + \left(-1+8v-8v^2\right) a_0 a_3 a_5^2 a_6 a_7 -$
$a_2 a_3 a_5^2 a_6 a_7 + \left(2-4v+4v^2\right) a_0^2 a_1 a_6^2 a_7 + \left(1-2v+2v^2\right) a_0 a_1^2 a_6^2 a_7 +$
$\left(-1+2v-2v^2\right) a_1^3 a_6^2 a_7 + \left(1-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_2 a_6^2 a_7 + \left(1+2v-2v^2\right) a_1^2 a_2 a_6^2 a_7 +$
$a_0^2 a_3 a_6^2 a_7 + \left(-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_3 a_6^2 a_7 + \left(-1+2v-2v^2\right) a_1^2 a_3 a_6^2 a_7 +$
$\left(1-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_4 a_6^2 a_7 + \left(1+2v-2v^2\right) a_1^2 a_4 a_6^2 a_7 + \left(4v-4v^2\right) a_1 a_2 a_4 a_6^2 a_7 +$
$\left(1-2v+2v^2\right) a_0 a_3 a_4 a_6^2 a_7 + \left(1-4v+4v^2\right) a_1 a_3 a_4 a_6^2 a_7 + a_0^2 a_5 a_6^2 a_7 +$
$\left(-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_5 a_6^2 a_7 + \left(-1+2v-2v^2\right) a_1^2 a_5 a_6^2 a_7 + \left(1-2v+2v^2\right) a_0 a_2 a_5 a_6^2 a_7 +$
$\left(1-4v+4v^2\right) a_1 a_2 a_5 a_6^2 a_7 + \left(-1+8v-8v^2\right) a_0 a_3 a_5 a_6^2 a_7 - a_1 a_3 a_5 a_6^2 a_7 +$
$\left(-2v+2v^2\right) a_0 a_1 a_6^3 a_7 + \left(2v-2v^2\right) a_1^2 a_6^3 a_7 + \left(v-v^2\right) a_0^4 a_7^2 + \left(2v-2v^2\right) a_0^3 a_1 a_7^2 +$
$\left(v-v^2\right) a_0^2 a_1^2 a_7^2 + \left(2v-2v^2\right) a_0^3 a_2 a_7^2 + \left(1+2v-2v^2\right) a_0^2 a_1 a_2 a_7^2 + a_0 a_1^2 a_2 a_7^2 +$
$\left(v-v^2\right) a_0^2 a_2^2 a_7^2 + a_0 a_1 a_2^2 a_7^2 + a_1^2 a_2^2 a_7^2 + \left(-1+2v-2v^2\right) a_0^3 a_3 a_7^2 +$
$\left(-1+2v-2v^2\right) a_0^2 a_1 a_3 a_7^2 + \left(-1+2v-2v^2\right) a_0^2 a_2 a_3 a_7^2 - a_0 a_1 a_2 a_3 a_7^2 +$
$\left(v-v^2\right) a_0^2 a_3^2 a_7^2 + \left(2v-2v^2\right) a_0^3 a_4 a_7^2 + \left(1+2v-2v^2\right) a_0^2 a_1 a_4 a_7^2 + a_0 a_1^2 a_4 a_7^2 +$
$\left(1+2v-2v^2\right) a_0^2 a_2 a_4 a_7^2 + \left(8v-8v^2\right) a_0 a_1 a_2 a_4 a_7^2 + \left(8v-8v^2\right) a_1^2 a_2 a_4 a_7^2 + a_0 a_2^2 a_4 a_7^2 +$
$\left(8v-8v^2\right) a_1 a_2^2 a_4 a_7^2 + \left(1-2v+2v^2\right) a_0^2 a_3 a_4 a_7^2 + \left(-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_3 a_4 a_7^2 +$
$\left(-4v+4v^2\right) a_0 a_2 a_3 a_4 a_7^2 + \left(-1+8v-8v^2\right) a_1 a_2 a_3 a_4 a_7^2 + \left(-4v+4v^2\right) a_0 a_3^2 a_4 a_7^2 +$
$\left(v-v^2\right) a_0^2 a_4^2 a_7^2 + a_0 a_1 a_4^2 a_7^2 + a_1^2 a_4^2 a_7^2 + a_0 a_2 a_4^2 a_7^2 + \left(8v-8v^2\right) a_1 a_2 a_4^2 a_7^2 +$
$a_2^2 a_4^2 a_7^2 + \left(2-4v+4v^2\right) a_0 a_3 a_4^2 a_7^2 + a_1 a_3 a_4^2 a_7^2 + a_2 a_3 a_4^2 a_7^2 + \left(v-v^2\right) a_3^2 a_4^2 a_7^2 +$
$\left(-1+2v-2v^2\right) a_0^3 a_5 a_7^2 + \left(-1+2v-2v^2\right) a_0^2 a_1 a_5 a_7^2 + \left(1-2v+2v^2\right) a_0^2 a_2 a_5 a_7^2 +$
$\left(-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_2 a_5 a_7^2 + \left(2-4v+4v^2\right) a_0 a_2^2 a_5 a_7^2 + a_1 a_2^2 a_5 a_7^2 +$
$\left(1+2v-2v^2\right) a_0^2 a_3 a_5 a_7^2 + \left(1-4v+4v^2\right) a_0 a_2 a_3 a_5 a_7^2 + \left(-1+2v-2v^2\right) a_0^2 a_4 a_5 a_7^2 -$
$a_0 a_1 a_4 a_5 a_7^2 + \left(-4v+4v^2\right) a_0 a_2 a_4 a_5 a_7^2 + \left(-1+8v-8v^2\right) a_1 a_2 a_4 a_5 a_7^2 +$
$a_2^2 a_4 a_5 a_7^2 + \left(1-4v+4v^2\right) a_0 a_3 a_4 a_5 a_7^2 + \left(1-2v+2v^2\right) a_2 a_3 a_4 a_5 a_7^2 +$
$\left(v-v^2\right) a_0^2 a_5^2 a_7^2 + \left(-4v+4v^2\right) a_0 a_2 a_5^2 a_7^2 + \left(v-v^2\right) a_2^2 a_5^2 a_7^2 + \left(-1+2v-2v^2\right) a_0^3 a_6 a_7^2 +$
$\left(1-2v+2v^2\right) a_0^2 a_1 a_6 a_7^2 + \left(2-4v+4v^2\right) a_0 a_1^2 a_6 a_7^2 + \left(-1+2v-2v^2\right) a_0^2 a_2 a_6 a_7^2 +$
$\left(-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_2 a_6 a_7^2 + a_1^2 a_2 a_6 a_7^2 + \left(1+2v-2v^2\right) a_0^2 a_3 a_6 a_7^2 +$
$\left(1-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_3 a_6 a_7^2 + \left(-1+2v-2v^2\right) a_0^2 a_4 a_6 a_7^2 + \left(-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_4 a_6 a_7^2 +$
$a_1^2 a_4 a_6 a_7^2 - a_0 a_2 a_4 a_6 a_7^2 + \left(-1+8v-8v^2\right) a_1 a_2 a_4 a_6 a_7^2 + \left(1-4v+4v^2\right) a_0 a_3 a_4 a_6 a_7^2 +$
$\left(1-2v+2v^2\right) a_1 a_3 a_4 a_6 a_7^2 + \left(1+2v-2v^2\right) a_0^2 a_5 a_6 a_7^2 + \left(1-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_5 a_6 a_7^2 +$
$\left(1-4v+4v^2\right) a_0 a_2 a_5 a_6 a_7^2 + \left(1-2v+2v^2\right) a_1 a_2 a_5 a_6 a_7^2 + \left(4v-4v^2\right) a_0 a_3 a_5 a_6 a_7^2 +$
$\left(v-v^2\right) a_0^2 a_6^2 a_7^2 + \left(-4v+4v^2\right) a_0 a_1 a_6^2 a_7^2 + \left(v-v^2\right) a_1^2 a_6^2 a_7^2 + \left(-1+2v-2v^2\right) a_0^3 a_7^3 +$
$\left(-1+2v-2v^2\right) a_0^2 a_1 a_7^3 + \left(-1+2v-2v^2\right) a_0^2 a_2 a_7^3 - a_0 a_1 a_2 a_7^3 +$
$\left(2v-2v^2\right) a_0^2 a_3 a_7^3 + \left(-1+2v-2v^2\right) a_0^2 a_4 a_7^3 - a_0 a_1 a_4 a_7^3 - a_0 a_2 a_4 a_7^3 +$
$\left(-1+4v-4v^2\right) a_1 a_2 a_4 a_7^3 + \left(-2v+2v^2\right) a_0 a_3 a_4 a_7^3 + \left(2v-2v^2\right) a_0^2 a_5 a_7^3 +$
$\left(-2v+2v^2\right) a_0 a_2 a_5 a_7^3 + \left(2v-2v^2\right) a_0^2 a_6 a_7^3 + \left(-2v+2v^2\right) a_0 a_1 a_6 a_7^3 + \left(v-v^2\right) a_0^2 a_7^4 \}$

```
Map[Variables, elim]
```

$\{\{a_1, a_2, a_4, a_0, a_3, v, a_5, a_6, a_7\}\}$

```
Exponent[elim[[1]], v]
```

```
2
```

Diese quadratische Gleichung ist nun “einfach lösbar”.

Weiterführendes Material

Extensive Literatur zu Gröbner Basen!

“Googleing” nach “Gröbner bases” bringt ≈123.000 matches (Stand März 2007), daher einige Startpunkte

Artikel & Originalmaterial (by Buchberger)

- [1] Bruno Buchberger’s Phd Thesis: *Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenrings nach einem nulldimensionalen Polynomideal* (An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zerodimensional polynomial ideal). Doctoral Thesis, Mathematical Institute, University of Innsbruck, 1965. Originally in german. *English version available in JSC Volume 41, Issues 3−4, 2006*.

- [2] Der 1970 Artikel: *Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems* (An algorithmic criterion for the solvability of algebraic systems of equations). Aequationes Math.4 (3),374-383. Originally in german. *English version available in [5]*.

- [3] Der 1985 Artikel (aka the “Bose paper”): *Gröbner Bases: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory*. In: N.K.Bose. Multidimensional Systems Theory, Reidel Publishing, 1985. *Very good survey!!! Rich Literature, also to all earlier papers by Buchberger!!!*

- [4] *Introduction to Gröbner Bases*. In [5].

Bücher

- [5] Buchberger, Winkler (Eds.): Gröbner Bases and Applications. Proceedings of the International Conference “33 Years of Groebner Bases”. 1998, RISC, Austria. In: London Mathematical Society Lecture Note Series, Volume 251. Cambridge University Press.

- [6] Becker, Weispfenning: Gröbner Bases: A Computational Approach to Commutative Algebra. New York: Springer−Verlag, 1993.

- [7] Cox, Little, O’Shea: Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Algebraic Geometry and Commutative Algebra, 2nd ed. New York: Springer−Verlag, 1996.

Web

- *Gröbner bases bibliographic database*: organized by Buchberger in the frame of the Special Semester on Gröbner bases, 2006. Searchable by categories, downloadable versions of papers, etc. Very nice!
http://www.ricam.oeaw.ac.at/Groebner−Bases−Bibliography/index.php

- Bruno Buchberger’s page about Gröbner bases:
www.risc.uni−linz.ac.at/people/buchberg/groebner_bases.html

Gröbner Basen in Biologie

- Bernd Sturmfels (Berkeley): Algebraic Statistics

- Reinhard Laubenbacher (Virginia Tech Institute): Reverse-Engineering von biologischen Netzwerken