Berechenbarkeit und Komplexität
Beispielklausur

Wolfgang Schreiner
Wolfgang.Schreiner@risc.jku.at

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studienkennzahl:

Gesamt: 100 Punkte.

$\geq$ 51 Punkte: GEN4
$\geq$ 64 Punkte: BEF3
$\geq$ 77 Punkte: GUT2
$\geq$ 89 Punkte: SGT1

1. (20P) Welche der folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$ sind regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (a) (5P) $L_a := \{0^m 1^n : \ m, n \in \mathbb{N} \wedge 2|m \wedge 3|n\}$

   (b) (5P) $L_b := \{0^m 1^n : \ m, n \in \mathbb{N} \wedge m|n\}$

   (c) (5P) $L_c := \{0^m 1^n : \ m, n \in \mathbb{N} \wedge m|n \wedge n < 1000\}$

   (d) (5P) $L_d := \{w : \ 3|\text{Wert von } w \text{ als Binärzahl}\}$

2. (20P) Sei L die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\{0, 1\}$, in denen die Folge "110" mindestens zweimal, nämlich am Anfang und am Ende des Wortes, vorkommt.

   Definieren Sie einen regulären Ausdruck und einen nichtdeterministischen endlichen Automaten

   $$M = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$$

   mit Sprache L (jedes Bestimmungsstück von M einzeln, δ als Tabelle *und* durch einen Zustandsgraphen).

   Kann man auch einen deterministischen Automaten mit Sprache L konstruieren? Warum (nicht)? Wenn ja, geben Sie einen solchen an.

   Kann man auch eine Turing-Maschine mit Sprache L konstruieren? Warum (nicht)?

3. (20P) Geben Sie für jede der folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$ an, ob sie rekursiv aufzählbar und ob sie rekursiv ist. Begründen Sie ihre Antwort:

   (a) (4P) $L_1 := \{w : \text{die Anzahl der 1en in } w \text{ ist eine Primzahl}\}$

   (b) (4P) $L_2 := \{\langle M \rangle : 10101 \in L(M)\}$

   (c) (4P) $L_3 := \{\langle M \rangle : 10101 \notin L(M)\}$

   (d) (4P) $L_4 := \{\langle M \rangle : L(M) \text{ ist rekursiv aufzählbar}\}$

   (e) (4P) $L_5 := \{\langle M \rangle : L(M) \text{ ist rekursiv}\}$

4. (20P) Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich (Beweis anhand der Definition der $\mathcal{O}$-Notation).

   (a) (8P) $n^2 + 8n + 64 = \mathcal{O}(n^3)$.

   (b) (6P) $n \cdot 2^n = \mathcal{O}(2^n)$

(c) (6P) $3^n = \mathcal{O}(2^n)$

5. (15P) Geben Sie für jedes der folgenden Probleme an, ob es semi-entscheidbar und ob es entscheidbar ist. Begründen Sie ihre Antwort.

   (a) (5P) Man entscheide für eine (durch ihren Code) gegebene Turing-Maschine M, und ein Eingabewort w, ob $w \notin L(M)$.

   (b) (5P) Man entscheide für eine (durch ihren Code) gegebene Turing-Maschine M, ob $L(M)$ rekursiv aufzählbar ist.

   (c) (5P) Man entscheide für zwei (durch ihre Codes) gegebene Turing-Maschinen M_1, M_2, ob $L(M_1) \cap L(M_2) \neq \emptyset$.

6. (5P) Ist die folgende Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

   > Sei M die Menge der Zeichenketten der Form "$1^n + 1^m = 1^{n+m}$" (z.B. ist "111+11=11111" in M) kann durch eine (unbeschränkte) Grammatik beschreiben werden.

---

1. (20P) Ist die Funktion $f(a,b) := \sum_{i=a}^{b} i$ primitiv rekursiv bzw. rekursiv? Und wie steht es mit der Funktion $g(a,b) := \min_i i \geq a \wedge (a \leq b \Rightarrow i \leq b \wedge i \text{ is prime})$? (Antworten Sie im Detail, z.B. durch entsprechende zumindest semi-formelle Definitionen).

2. (20P) Beantworten Sie folgende Fragen mit ausführlicher Begründung:

   (a) (5P) Ist es richtig, dass jedes Problem, dass mit einer deterministischen Turing-Maschine in exponentieller Zeit lösbar ist, mit einer nicht-deterministischen Turing-Maschine in polynomialer Zeit lösbar ist?

   (b) (5P) Ist es richtig, dass wenn ein einziges Problem in $\mathcal{NP}$ deterministisch in polynomialer Zeit lösbar ist, dass dann alle Probleme in $\mathcal{NP}$ deterministisch in polynomialer Zeit lösbar sind?

   (c) (5P) Ist es richtig, dass wenn die Sprache L von einer nicht-deterministischen Turingmaschine in polynomialer Zeit erkannt werden kann, dass auch $\bar{L}$ von einer nicht-deterministischen Turingmaschine in polynomialer Zeit erkannt werden kann?

   (d) (5P) Gibt es Probleme, die deterministisch in polynomialer Zeit, aber nicht mit polynomialem Speicher lösbar sind? Und wie steht es mit der umgekehrten Richtung?