Berechenbarkeit und Komplexität
Komplexität von Algorithmen

Wolfgang Schreiner
Wolfgang.Schreiner@risc.jku.at

Research Institute for Symbolic Computation (RISC)
Johannes Kepler University, Linz, Austria
http://www.risc.jku.at

Komplexitätsmaße

Wie wächst der Aufwand für die Ausführung eines Algorithmus mit wachsender Problemgröße?

- Problemgröße:
  - Eigenschaft der Eingabe, die ein Maß für den Aufwand darstellt.
- Zeitkomplexität eines Algorithmus:
  - Zeitaufwand als Funktion der Problemgröße.
  - Grenzverhalten: asymptotische Zeitkomplexität.
    - Problemgröße gegen unendlich.
- Raumkomplexität eines Algorithmus:
  - Speicheraufwand als Funktion der Problemgröße.
  - Grenzverhalten: asymptotische Raumkomplexität.
- worst-case Komplexität:
  - Maximale Komplexität für alle Eingaben der gegebenen Problemgröße.
- erwartete Komplexität:
  - Durchschnittliche Komplexität über alle Eingaben einer Problemgröße.

Ordnung der Komplexitätsfunktion

Im allgemeinen ist man nur an der "Größenordnung" einer Komplexitätsfunktion interessiert.

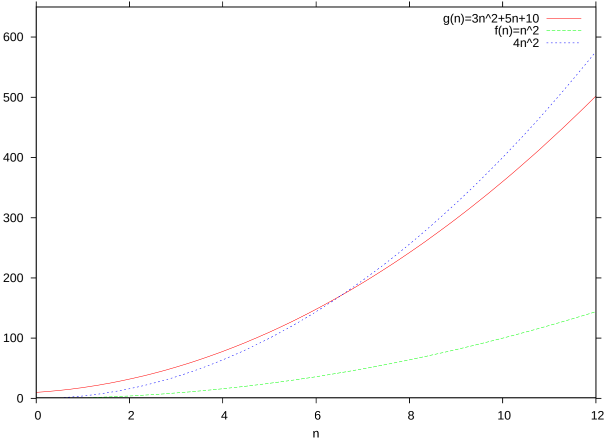
- $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$

  "$g(n)$ ist von der Ordnung $f(n)$"

  - $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
    - g ist eine Komplexitätsfunktion.
    - f beschreibt die "Größenordnung" von g.
  - $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}_{>0} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : g(n) \leq c \cdot f(n)$
    - Ab einer gewissen Eingabegröße N wächst f mindestens so schnell wie g (d.h. ergibt mit einer gewissen Konstante c multipliziert einen mindestens so großen Wert).

Additive und multiplikative Konstanten spielen bei der Ordnung einer Komplexitätsfunktion keine Rolle.

Visualisierung



Es gilt $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$.

Beispiele

- $6n^2 + 7n = \mathcal{O}(n^2)$
  - Wir setzen $c := 7$ und $N := 7$.
  - Es gilt für alle $n \geq 7$:
    $$6n^2 + 7n \leq 6n^2 + n \cdot n = 6n^2 + n^2 = 7n^2$$
- $\log_a n = \mathcal{O}(\log_b n)$ (für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$)
  - Wir setzen $c := \log_a b$ und $N := 0$.
  - Es gilt für alle $n \geq 0$:
    $$\log_a n = \log_a b \cdot \log_b n$$
- $2^n + n^2 = \mathcal{O}(2^n)$
  - Wir setzen $c := 2$ und $N := 4$.
  - Es gilt für alle $n \geq 4$:
    $$2^n + n^2 \stackrel{(*)}{\leq} 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n$$
  - Lemma (*): $\forall n \geq 4 : n^2 \leq 2^n$.
    - Induktionsbasis ($n = 4$): $4^2 = 16 = 2^4$.
    - Induktionsschritt: $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + 2n + 2n = n^2 + 4n \leq n^2 + n \cdot n = n^2 + n^2 = 2n^2 \stackrel{Ind.hyp.}{\leq} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Bedeutung der Asymptotischen Komplexität

Macht die Entwicklung immer schnellerer Computer die Entwicklung asymptotisch schnellerer Algorithmen überflüssig?

- Verschiedene Algorithmen zur Lösung des gleichen Problems:

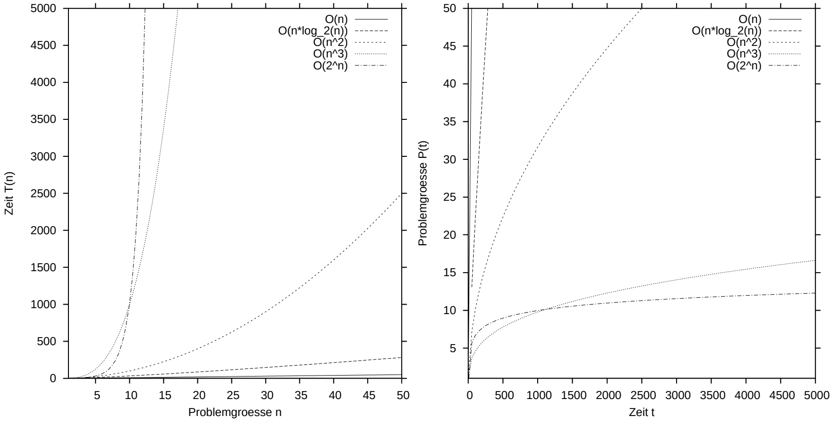
		Maximale Problemgröße n		
Algorithmus	Zeitkomplexität	1s	1m	1h
A_1	$\mathcal{O}(n)$	1.000	60.000	3.600.000
A_2	$\mathcal{O}(n \log n)$	140	4893	250.000
A_3	$\mathcal{O}(n^2)$	31	244	1897
A_4	$\mathcal{O}(n^3)$	10	39	153
A_5	$\mathcal{O}(2^n)$	9	15	21

- 10 mal schnellerer Computer kommt auf den Markt:

		Maximale Problemgröße n			
Algorithmus	Zeitkomplexität	1s	1m	1h	Zunahme
A_1	$\mathcal{O}(n)$	10.000	600.000	36.000.000	$*10$
A_2	$\mathcal{O}(n \log_2 n)$	1.003	39.311	1.736.782	$*7$ $(\approx)$
A_3	$\mathcal{O}(n^2)$	100	774	6000	$*3.16$ $(\sqrt{10})$
A_4	$\mathcal{O}(n^3)$	21	84	330	$*2.15$ $(\sqrt[3]{10})$
A_5	$\mathcal{O}(2^n)$	13	19	25	$+3.3$ $(\log_2 10)$

Problemgröße wächst nur deutlich bei niedriger Laufzeitkomplexität!

Bedeutung der Asymptotischen Komplexität



Multiplikation ganzer Zahlen

Wie schnell kann man zwei n-stellige Zahlen x und y multiplizieren?

- Klassischer Algorithmus: $\mathcal{O}(n^2)$.
  - n Multiplikationen $r_i \leftarrow x \cdot y_i$ der Komplexität $\mathcal{O}(n)$.
    - Jede Multiplikation besteht aus n Multiplikationen $x_j \cdot y_i$.
  - $n-1$ Additionen $r_1 + \ldots + r_n$ der Komplexität $\mathcal{O}(n)$.
    - Jede Addition enthält maximal $2n$ Additionen zweier Ziffern.
- Karatsuba und Ofman (1962): $\mathcal{O}(n^{\log_2 3}) \approx \mathcal{O}(n^{1.59})$
  - Grundidee: "divide und conquer" Prinzip.
  - Führt die Multiplikation zweier n-stelliger Zahlen zurück auf drei Multiplikationen zweier $n/2$-stelliger Zahlen.

Verbesserung auch von klassischen Algorithmen möglich.

Karatsuba-Algorithmus

Wir nehmen an, die Anzahl der Stellen n ist eine Potenz von 2.

Karatsuba($\downarrow n, \downarrow x, \downarrow y, \uparrow z$):
  if $n = 1$ **then**
    $z \leftarrow x_1 \cdot y_1$
  else
    $a \leftarrow x_{n/2+1\ldots n}$; $b \leftarrow x_{1\ldots n/2}$
    $c \leftarrow y_{n/2+1\ldots n}$; $d \leftarrow y_{1\ldots n/2}$
    Karatsuba($\downarrow n/2, \downarrow a+b, \downarrow c+d, \uparrow u$)
    Karatsuba($\downarrow n/2, \downarrow a, \downarrow c, \uparrow v$)
    Karatsuba($\downarrow n/2, \downarrow b, \downarrow d, \uparrow w$)
    $z \leftarrow v \cdot \beta^n + (u - v - w) \cdot \beta^{n/2} + w$
end Karatsuba.

Nimmt an, dass die Additionen $a + b$ und $c + d$ keinen Übertrag zu $n + 1$ Stellen ergeben (siehe Skriptum für die Behandlung auch dieses Falls).

Analyse des Karatsuba-Algorithmus

- Korrektheit: sei β die Basis der Zahlendarstellung.
  - $x = a \cdot \beta^{n/2} + b$
  - $y = c \cdot \beta^{n/2} + d$
  - $x \cdot y = (a \cdot \beta^{n/2} + b) \cdot (c \cdot \beta^{n/2} + d)$
    $= ac \cdot \beta^n + (ad + bc) \cdot \beta^{n/2} + bd$
    $= ac \cdot \beta^n + ((a + b) \cdot (c + d) - ac - bd) \cdot \beta^{n/2} + bd$
    $= v \cdot \beta^n + (u - v - w) \cdot \beta^{n/2} + w$
- Laufzeit:
  $$T(n) = \begin{cases} k, & \text{wenn } n = 1 \\ 3T(n/2) + kn & \text{wenn } n > 1 \end{cases}$$
  - k konstanter Faktor.
    - k ... Obergrenze für die Addition im "then"-Zweig.
    - kn ... Obergrenze für Additionen/Verschiebungen im "else"-Zweig.

Lösung der Rekursionsrelation notwendig.

Analyse des Karatsuba-Algorithmus

- Behauptung: $T(n) = 3kn^{\log_2 3} - 2kn$.
  - Induktionsbasis $n = 1$:

    $$T(1) = k = 3k - 2k = 3k \cdot 1^{\log_2 3} - 2k \cdot 1.$$
  - Induktionsschritt $n = 2\bar{n}$:

    $$\begin{aligned}
    &T(2\bar{n}) = 3T(\bar{n}) + 2k\bar{n} \\
    &= 3(3k\bar{n}^{\log_2 3} - 2k\bar{n}) + 2k\bar{n} \\
    &= 3k \cdot 3 \cdot \bar{n}^{\log_2 3} - 6k\bar{n} + 2k\bar{n} \\
    &= 3k \cdot 2^{\log_2 3} \cdot \bar{n}^{\log_2 3} - 4k\bar{n} \\
    &= 3k \cdot (2\bar{n})^{\log_2 3} - 2k \cdot (2\bar{n}).
    \end{aligned}$$

Für die Zeitkomplexität $T(n)$ des Karatsuba-Algorithmus gilt also $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 3})$.

Lösung linearer Rekursionsrelationen

Wie kommt man zur Lösung der Rekursionsrelation?

- Satz: seien a, b, n natürliche Zahlen. Die Lösung von
$$T(n) = \begin{cases} b, & \text{wenn } n = 1 \\ aT(n/c) + bn & \text{wenn } n > 1 \end{cases}$$
für eine Potenz n von c ist
$$T(n) = \begin{cases} \mathcal{O}(n), & \text{wenn } a < c \\ \mathcal{O}(n \log_c n), & \text{wenn } a = c \\ \mathcal{O}(n^{\log_c a}), & \text{wenn } a > c \end{cases}$$
  - Beweis: siehe Skriptum.

Nützlich für die Analyse von linearen "divide and conquer" Algorithmen.

Lineare "divide and conquer"-Algorithmen

$$T(n) = \begin{cases} \mathcal{O}(n), & \text{wenn } a < c \\ \mathcal{O}(n \log_c n), & \text{wenn } a = c \\ \mathcal{O}(n^{\log_c a}), & \text{wenn } a > c \end{cases}$$

- Lineare "divide und conquer"-Algorithmen:
  - Problem wird in a Teilprobleme zerlegt.
  - Jedes Teilproblem hat Größe n/c.
  - Aufwand für Zerlegung und Kombination der Teilergebnisse ist linear.
- Beispiel $c = 2$: Teile halber Größe.
  - $a = 1$ Teil: $T(n) = \mathcal{O}(n)$.
  - $a = 2$ Teile: $T(n) = \mathcal{O}(n \log_2 n)$.
  - $a = 3$ Teile: $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 3})$.
  - $a = 4$ Teile: $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 4}) = \mathcal{O}(n^2)$.
  - $a = 8$ Teile: $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 8}) = \mathcal{O}(n^3)$.

Die Anzahl der Teile geht in die Laufzeitkomplexität logarithmisch ein.

Das Master-Theorem

Verallgemeinerung des bisher behandelten Falls:

$$T(n) = a \cdot T(n/c) + f(n)$$

1. $f(n) = \mathcal{O}(n^{(\log_c a)-\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$: $T(n) = \Theta(n^{\log_c a})$
2. $f(n) = \Theta(n^{\log_c a} \cdot \log^k n)$: $T(n) = \Theta(n^{\log_c a} \cdot \log^{k+1} n)$
3. $f(n) = \Omega(n^{(\log_c a)+\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$ and $a \cdot f(n/c) \leq d \cdot f(n)$ für ein $d < 1$ und alle genügend großen n: $T(n) = \Theta(f(n))$
   - $f(n) = \Theta(g(n))$: $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ und $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$.
   - $f(n) = \Omega(g(n))$: $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$.

Nützlich für Analyse von allgemeinen “divide and conquer” Algorithmen.

Komplexität von RAM Programmen

Abhängig von den Kosten, die für die Ausführung einer Instruktion angenommen werden.

- Uniformes Kostenkriterium:
  - Jedes Register benötigt eine Raumeinheit.
  - Jede Instruktion benötigt eine Zeiteinheit.
- Logarithmisches Kostenkriterium:
  - Anzahl der für ein Register benötigten Speicherzellen ist abhängig von der Länge $l(n)$ des Inhalts n des Registers:

$$l(n) := \begin{cases} \lfloor \log |n| \rfloor + 1, & \text{wenn } n \neq 0 \\ 1, & \text{wenn } n = 0 \end{cases}$$

Das uniforme Kostenkriterium ist die Default-Annahme bei der Analyse der Komplexität von RAM-Programmen.

Logarithmische Komplexität

Wir betrachten die Auswirkungen des logarithmischen Kostenkriteriums.

- Logarithmische Raumkomplexität: $\sum l(x_i)$
  - Summe über alle verwendeten Register i (einschließlich Akkumulator).
  - x_i ist dabei die betragsmäßig größte Zahl, die während der Berechnung je in Register i gespeichert wird.
- Logarithmische Kosten für Operanden:
  - Zeit $t(a)$ für den Zugriff auf den Operanden a:

$$t(\texttt{=i}) := l(i)$$
$$t(\texttt{i}) := l(i) + l(c(i))$$
$$t(\texttt{*i}) := l(i) + l(c(i)) + l(c(c(i)))$$

- Logarithmische Kosten für Instruktionen:
  - Zeit für die Ausführung der Instruktion.
  - Annahme: Zeit ist proportional zur Länge des Operanden.

Logarithmische Komplexität

Die logarithmischen Kosten für jede RAM-Instruktion:

Instruktion	Kosten
LOAD a	$t(a)$
STORE i	$l(c(0)) + l(i)$
STORE $*i$	$l(c(0)) + l(i) + l(c(i))$
ADD a	$l(c(0)) + t(a)$
SUB a	$l(c(0)) + t(a)$
MULT a	$l(c(0)) + t(a)$
DIV a	$l(c(0)) + t(a)$
READ i	$l(input) + l(i)$
READ $*i$	$l(input) + l(i) + l(c(i))$
WRITE a	$t(a)$
JUMP b	1
JGTZ b	$l(c(0))$
JZERO b	$l(c(0))$
HALT	1

Auch Multiplikation und Division gelten als lineare Operationen (?!).

Beispiel

RAM-Programm für die Funktion $f(n) = \begin{cases} n^n, & \text{wenn } n > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

read r_1
if $r_1 \leq 0$ **then**
  write 0
else
  $r_2 \leftarrow r_1$
  $r_3 \leftarrow r_1 - 1$
  while $r_3 > 0$ **do**
    $r_2 \leftarrow r_2 \cdot r_1$
    $r_3 \leftarrow r_3 - 1$
  write r_2

	READ	1	Eingabe von $c(1)$
	LOAD	1	$c(0) \leftarrow c(1)$
	JGTZ	else	wenn $c(0) > 0$, else
	WRITE	=0	Ausgabe von 0
	JUMP	halt	
else:	LOAD	1	$c(0) \leftarrow c(1)$
	STORE	2	$c(2) \leftarrow c(0)$
	LOAD	1	$c(0) \leftarrow c(1)$
	SUB	=1	$c(0) \leftarrow c(0) - 1$
	STORE	3	$c(3) \leftarrow c(0)$
while:	LOAD	3	$c(0) \leftarrow c(3)$
	JGTZ	body	wenn $c(0) > 0$, body
	JUMP	done	
body:	LOAD	2	$c(0) \leftarrow c(2)$
	MULT	1	$c(0) \leftarrow c(0) \cdot c(1)$
	STORE	2	$c(2) \leftarrow c(0)$
	LOAD	3	$c(0) \leftarrow c(3)$
	SUB	=1	$c(0) \leftarrow c(0) - 1$
	STORE	3	$c(3) \leftarrow c(0)$
	JUMP	while	
done:	WRITE	2	Ausgabe von $c(2)$
halt:	HALT		

Beispiel

- Zeitkomplexität:
  - Bestimmt durch die Zeitkomplexität der `MULT`-Instruktionen:
    - Schleife führt $n-1$ Iterationen aus.
    - In Iteration i enthält Akkumulator n^i und r_2 enthält n.
  - Uniformes Kostenkriterium: $(n-1)\cdot 1 = \mathcal{O}(n)$
  - Logarithmisches Kostenkriterium: $\mathcal{O}(n^2 \log n)$
    - i-te `MULT`-Instruktion: $l(n^i) + l(n) \approx i \cdot \log n + \log n = (i+1)\log(n)$
    - Alle `MULT`-Instruktionen: $\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)\log n = \mathcal{O}(n^2 \log n)$
- Raumkomplexität:
  - Inhalt der Register 0 bis 3.
  - Uniformes Kostenkriterium: $3 = \mathcal{O}(1)$
  - Logarithmisches Kostenkriterium: $\mathcal{O}(n \log n)$
    - n^n ist die größte gespeicherte Zahl.
    - $l(n^n) \approx n \log n$

Das logarithmische Kostenkriterium ist realistischer, wenn die beteiligten Zahlen nicht mehr in eine einzelne Speicherzelle passen.

Beispiel

RAM-Programm, das alle Wörter aus 1en und 2en akzeptiert, die aus gleich vielen 1en wie 2en bestehen.

$r_2 \leftarrow 0$
read r_1
while $r_1 \neq 0$ **do**
  if $r_1 \neq 1$
    then $r_2 \leftarrow r_2 - 1$
    else $r_2 \leftarrow r_2 + 1$
  read r_1
if $r_2 = 0$ **then write** 1

	`LOAD`	`=0`	$c(0) = 0$
	`STORE`	`2`	$c(2) = c(0)$
	`READ`	`1`	Eingabe von r_1
`while:`	`LOAD`	`1`	$c(0) \leftarrow c(1)$
	`JZERO`	`done`	wenn $c(0) = 0$, `done`
	`LOAD`	`1`	$c(0) \leftarrow c(1)$
	`SUB`	`=1`	$c(0) \leftarrow c(0) - 1$
	`JZERO`	`one`	wenn $c(0) = 0$, `one`
	`LOAD`	`2`	$c(0) \leftarrow c(2)$
	`SUB`	`=1`	$c(0) \leftarrow c(0) - 1$
	`STORE`	`2`	$c(2) = c(0)$
	`JUMP`	`read`	
`one:`	`LOAD`	`2`	$c(0) \leftarrow c(2)$
	`ADD`	`=1`	$c(0) \leftarrow c(0) + 1$
	`STORE`	`2`	$c(2) = c(0)$
`read:`	`READ`	`1`	Eingabe von $c(1)$
	`JUMP`	`while`	
`done:`	`LOAD`	`2`	$c(0) \leftarrow c(2)$
	`JZERO`	`write`	wenn $c(0) = 0$, `write`
	`HALT`		
`write:`	`WRITE`	`=1`	Ausgabe von 1
	`HALT`		

Beispiel

Wort aus n Zeichen wird gelesen.

- n Iterationen.
- In jeder Iteration Addition von 1 zu einer Zahl kleiner n.
- Maximaler Absolutbetrag n aller gespeicherten Zahlen.

	Uniforme Kosten	Logarithmische Kosten
Zeitkomplexität	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n \log n)$
Raumkomplexität	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\log n)$

Komplexität von RAM/RASP-Simulationen

Die folgenden Sätze gelten sowohl für das uniforme als auch für das logarithmische Kostenkriterium.

- Satz: Für jedes RAM-Programm mit Zeitkomplexität $T(n)$ gibt es eine Konstante k und ein äquivalentes RASP-Programm mit Zeitkomplexität $kT(n)$.
  - Beweis: das zum RAM-Programm P äquivalente RASP-Programm P' enthält für jede Instruktion von P maximal 6 Instruktionen. Unter dem uniformen Kostenkriterium ist die Zeitkomplexität von P' also $6T(n)$. Durch Analyse von P' kann man zeigen, dass für das logarithmische Kostenkriterium die Zeitkomplexität von P' gleich $(6 + 11 \cdot l(r)) \cdot T(n)$ ist (r ist der bei der Simulation angenommene Verschiebungsfaktor).
- Satz: Für jedes RASP-Programm mit Zeitkomplexität $T(n)$ gibt es eine Konstante k und ein äquivalentes RAM-Programm mit Zeitkomplexität $kT(n)$.

Die Simulation von RAM durch RASP und umgekehrt kostet nur einen konstanten Zeitfaktor.

Komplexität von Turing-Maschinen

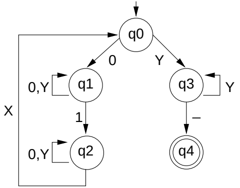
- Die (worst-case) Zeitkomplexität $T(n)$ einer Turing-Maschine M:
  - $T(n)$ ist die maximale Anzahl der Übergänge zu einer neuen Konfiguration bei einer Berechnung, die mit einem beliebigen Eingabewort der Länge n beginnt.
    - Terminiert die Berechnung für ein Eingabewort der Länge n nicht, ist $T(n)$ undefiniert.
- Die (worst-case) Raumkomplexität $S(n)$ einer Turing-Maschine M:
  - $S(n)$ ist die maximale Distanz, die sich einer der L/S-Köpfe während einer Berechnung, die mit einem beliebiges Eingabewort der Länge n beginnt, vom linken Bandende entfernt.
    - Gibt es ein Eingabewort der Länge n, für das sich der L/S-Kopf unbegrenzt nach rechts bewegt, ist $S(n)$ undefiniert.
- Die Zeit/Raumkomplexität einer nicht-deterministischen T.-M. M:
  - Die maximale Zeit/Raumkomplexität, die M für eine Eingabe der Länge n (für eine beliebige Folge von nichtdeterministischen Wahlen) erreichen kann.

Beispiel

$M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$ zur Erkennung der Wörter $0^m 1^m$ $(m \in \mathbb{N})$.

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{\sqcup, 0, 1, X, Y\}$, $F = \{q_4\}$

δ	$\sqcup$	0	1	X	Y
q_0	–	(q_1, X, R)	–	–	(q_3, Y, R)
q_1	–	$(q_1, 0, R)$	(q_2, Y, L)	–	(q_1, Y, R)
q_2	–	$(q_2, 0, L)$	–	(q_0, X, R)	(q_2, Y, L)
q_3	$(q_4, \sqcup, R)$	–	–	–	(q_3, Y, R)
q_4	–	–	–	–	–



- $T(n) = \mathcal{O}(n^2)$ (für Eingabewort w der Länge n):
  - Hauptschleife wird höchstens $(n+1)/2$ mal durchlaufen.
    - Ersetzt in jedem Durchlauf zwei Symbole von w durch X und Y.
  - Jeder Schleifendurchlauf: $2n + 2$ Schritte.
    - $n+1$ Schritte für die Suche nach rechts, n Schritte für die Suche nach links, 1 Schritt für die Bewegung zum nächsten Symbol.
  - Schlussbehandlung: n Schritte.
  - In Summe $(2n+2) \cdot (n+1)/2 + n = (n+1)^2 + n$ Schritte.
- $S(n) = \mathcal{O}(n)$:
  - L/S-Kopf bewegt sich höchstens über eine Position von w hinaus.

Komplexität von RAM/RASP-Simulationen

- Zwei Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sind in polynomialer Relation:
  - Es gibt Polynome $p_1(x)$ und $p_2(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

    $$f_1(n) \leq p_1(f_2(n)) \text{ und } f_2(n) \leq p_2(f_1(n))$$
- Beispiele:
  - $2n^2$ und n^5 sind in polynomialer Relation.
    - $p_1(x) = 2x,\ p_2(x) = x^3$.
    - $2n^2 \leq 2n^5$ und $n^5 \leq (2n^2)^3$
  - a^n und b^n sind in polynomialer Relation (für $a, b > 1$):
    - $p(x) = x^{\lceil \log_b a \rceil}$.
    - $a^n = (b^{\log_b a})^n = (b^n)^{\log_b a} \leq p(b(n))$
  - n^2 und 2^n sind nicht in polnomialer Relation:
    - Es gibt kein Polynom $p(x)$ sodass $p(n^2) \geq 2^n$, für alle n.

Kriterium, dass sich zwei Funktionen nicht mehr als um eine "polynomiale Transformation" voneinander unterscheiden.

Komplexität von RAM/RASP-Simulationen

- Satz: Das RAM/RASP Modell unter dem logarithmischen Kostenkriterium und das Turing-Maschinen-Modell sind in polnomialer Relation.
  - Zu jeder RAM/RASP R gibt es eine Turing-Maschine M, sodass die Komplexitätsfunktionen von R und M in polynomialer Relation stehen, und umgekehrt.
- Uniformes Kostenkriterium: jede Turing-Maschine mit Komplexität $\mathcal{O}(T(n))$ wird durch RAM mit Komplexität $\mathcal{O}(T^2(n))$ simuliert.
  - Umgekehrung gilt nicht: RAM kann durch iteratives Quadrieren in $\mathcal{O}(n)$ Schritten die Zahl 2^{2^n} berechnen ($2^{2^n} = (2^{2^{n-1}})^2$).
  - Turing-Maschine braucht 2^n Zellen, nur um diese Zahl zu speichern.
    - RAM benötigt dafür nur 1 Register.

Unter dem logarithmischen Kostenkriterium unterscheidet sich die Komplexität von RAM und Turing-Maschine “nicht essentiell”.