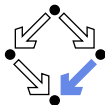


Berechenbarkeit und Komplexität

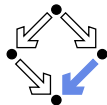
Rekursive Funktionen

Wolfgang Schreiner
Wolfgang.Schreiner@risc.jku.at

Research Institute for Symbolic Computation (RISC)
Johannes Kepler University, Linz, Austria
<http://www.risc.jku.at>



Rekursive Funktionen



Rein mathematischer Zugang zum Begriff der berechenbaren Funktionen.

- Die **Grundfunktionen**:

- Die **Nullfunktion** $\text{null}() := 0$.

- Die **Nachfolgerfunktion** $\text{succ}(x) := x + 1$.

- Die **Projektionsfunktionen** $\text{proj}_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i, 1 \leq i \leq n$.

- Die aus der **Komposition** von f und g_1, \dots, g_k entstandene Funktion:

$$h(x_1, \dots, x_n) := f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

- f ... eine Funktion in k Variablen.

- (g_1, \dots, g_k) ... k Funktionen in n Variablen.

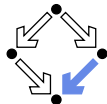
- Die durch **Rekursion** aus f und g entstandene Funktion:

$$h(m, x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n), & \text{wenn } m = 0 \\ g(m-1, h(m-1, x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n), & \text{wenn } m > 0 \end{cases}$$

- f ... eine Funktion in n Variablen.

- g ... eine Funktionen in $n + 2$ Variablen.

Primitiv Rekursive Funktionen



- Die Klasse \mathcal{PR} der **primitiv rekursiven Funktionen** ist wie folgt induktiv definiert:
 - Die Grundfunktionen gehören zu \mathcal{PR} .
 - Alle Funktionen, welche durch Komposition und Rekursion aus Funktionen in \mathcal{PR} entstehen, gehören zu \mathcal{PR} .(Keine andere Funktion gehört zu \mathcal{PR} .)
- **Satz:** jede primitiv rekursive Funktion ist Turing-berechenbar.
 - Das Konzept der "Turing-Berechenbarkeit" ist mindestens so mächtig wie das der primitiv rekursiven Funktionen.(Das umgekehrte gilt nicht, wie wir später sehen werden.)

Eine Klasse von Funktionen, deren Konstruktion ihre Berechenbarkeit sicher stellt.

Beispiel



Viele bekannte zahlentheoretischen Funktionen sind primitiv rekursiv.

- Die Additionsfunktion $f(x, y) := x + y$ ist primitiv rekursiv:

$$f(0, y) := y$$

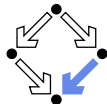
$$f(x + 1, y) := f(x, y) + 1$$

$$f(x, y) := \begin{cases} \text{proj}_1^1(y), & \text{wenn } x = 0 \\ s(x - 1, f(x - 1, y), y), & \text{wenn } x > 0 \end{cases}$$

$$s(u, v, w) = \text{succ}(\text{proj}_2^3(u, v, w))$$

Konstruktion aus Grundfunktionen durch Rekursion und Komposition.

Beispiel



- Die Multiplikationsfunktion $g(x, y) := x \cdot y$ ist primitiv rekursiv:

$$g(0, y) := 0$$

$$g(x + 1, y) := g(x, y) + y$$

$$g(x, y) := \begin{cases} n(y), & \text{wenn } x = 0 \\ r(x - 1, g(x - 1, y), y), & \text{wenn } x > 0 \end{cases}$$

$$n(x) = \begin{cases} \text{null}(), & \text{wenn } x = 0 \\ \text{proj}_2^2(x - 1, n(x - 1)), & \text{wenn } x > 0 \end{cases}$$

$$r(u, v, w) = f(\text{proj}_2^3(u, v, w), \text{proj}_3^3(u, v, w))$$

Konstruktion aus Grundfunktionen und bereits konstruierten primitiv rekursiven Funktionen durch Rekursion und Komposition.

Beispiel



- Die Faktoriellenfunktion $h(x) := x!$ ist primitiv rekursiv:

$$h(0) := 1$$

$$h(x + 1) := h(x) \cdot (x + 1)$$

$$h(x) := \begin{cases} o(), & \text{wenn } x = 0 \\ s(x - 1, h(x - 1)), & \text{wenn } x > 0 \end{cases}$$

$$o() := \text{succ}(\text{null}())$$

$$s(x_1, x_2) := g(\text{succ}(\text{proj}_1^2(x_1, x_2)), \text{proj}_2^2(x_1, x_2))$$

Konstruktion aus Grundfunktionen und einer bereits konstruierten primitiv rekursiven Funktion durch Rekursion und Komposition.



Beispiel

- Die Exponentialfunktion x^y :

$$x^0 := 1$$

$$x^{y+1} := x^y \cdot x$$

- Die Vorgängerfunktion $\text{pred}(x) := x - 1$:

$$\text{pred}(0) := 0$$

$$\text{pred}(x + 1) := x$$

- Die Differenz $x \dot{-} y$ auf \mathbb{N} :

$$x \dot{-} 0 := x$$

$$x \dot{-} (y + 1) := \text{pred}(x \dot{-} y)$$

- Die Abstandsfunktion $|x - y|$:

$$|x - y| := (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$$

Die formal genaue Definition als primitiv rekursive Funktion ist nicht weiters schwierig (Übung!).



Primitiv Rekursive Prädikate

Primitiv rekursive Funktionen, die nur die Werte 0 (“falsch”) oder 1 (“wahr”) annehmen.

- Das Prädikat $x = 0$

$$\text{istnull}(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = 1 - x$$

- Das Prädikat $x = y$

$$d(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \text{istnull}(|x - y|)$$

- Das Prädikat $x \leq y$

$$l(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \leq y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \text{istnull}(x - y)$$

Komposition von bereits definierten primitiv rekursiven Funktionen.



Weitere Konstruktionen

- **Satz:** sind P und Q primitiv rekursive Prädikate, dann sind auch die folgenden Prädikate primitiv rekursiv:

$$\neg P, P \vee Q, P \wedge Q$$

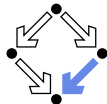
- Beweis:

- $(\neg P)(x_1, \dots, x_n) = \text{istnull}(P(x_1, \dots, x_n))$
- $(P \wedge Q)(x_1, \dots, x_n) = P(x_1, \dots, x_n) \cdot Q(x_1, \dots, x_n)$
- $(P \vee Q)(x_1, \dots, x_n) = \neg(\neg P(x_1, \dots, x_n) \wedge \neg Q(x_1, \dots, x_n))$

- **Satz:** sind g und h primitiv rekursive Funktionen und P ein primitiv rekursives Prädikat, dann ist auch die folgendermaßen definierte Funktion f primitiv rekursiv:

$$f(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} g(x_1, \dots, x_n), & \text{wenn } P(x_1, \dots, x_n) \\ h(x_1, \dots, x_n), & \text{sonst} \end{cases}$$

- Beweis: $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) \cdot P(x_1, \dots, x_n) + h(x_1, \dots, x_n) \cdot (\neg P(x_1, \dots, x_n))$



- **Satz:** Sei $f(t, x_1, \dots, x_n)$ eine primitiv rekursive Funktion. Dann sind auch die folgenden Funktionen g und h primitiv rekursiv:

$$g(y, x_1, \dots, x_n) := \sum_{t=0}^y f(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$h(y, x_1, \dots, x_n) := \prod_{t=0}^y f(t, x_1, \dots, x_n)$$

- **Beweis:**

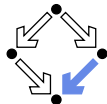
$$g(0, x_1, \dots, x_n) := f(0, x_1, \dots, x_n)$$

$$g(t+1, x_1, \dots, x_n) := g(t, x_1, \dots, x_n) + f(t+1, x_1, \dots, x_n)$$

$$h(0, x_1, \dots, x_n) := f(0, x_1, \dots, x_n)$$

$$h(t+1, x_1, \dots, x_n) := h(t, x_1, \dots, x_n) \cdot f(t+1, x_1, \dots, x_n)$$

Weitere Konstruktionen



- **Satz:** Sei $P(t, x_1, \dots, x_n)$ ein primitiv rekursives Prädikat. Dann sind auch die folgenden Prädikate primitiv rekursiv:

$$\forall t : t \leq y \Rightarrow P(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$\exists t : t \leq y \wedge P(t, x_1, \dots, x_n)$$

- **Beweis:**

$$(\forall t : t \leq y \Rightarrow P(t, x_1, \dots, x_n)) \Leftrightarrow \left(\prod_{t=0}^y P(t, x_1, \dots, x_n) \right) = 1$$

$$(\exists t : t \leq y \wedge P(t, x_1, \dots, x_n)) \Leftrightarrow \left(\sum_{t=0}^y P(t, x_1, \dots, x_n) \right) \neq 0$$

Beispiel



- Das Prädikat $y|x$ (“ y teilt x ”) ist primitiv rekursiv:

$$y|x :\Leftrightarrow \exists t : t \leq x \wedge y \cdot t = x$$

- Das Prädikat $\text{Prime}(x)$ (“ x ist eine Primzahl”) ist primitiv rekursiv.

$$\text{Prime}(x) :\Leftrightarrow (x \geq 2) \wedge \forall t : t \leq x \Rightarrow (t = 1 \vee t = x \vee \neg(t|x))$$

In der Praxis sind fast alle interessierenden Funktionen und Prädikate primitiv rekursiv.

Primitiv Rekursive Funktionen



Aber nicht alle Turing-berechenbaren Funktionen sind primitiv rekursiv.

- Die *Ackermann-Funktion*:

$$\text{ack}(0, y) := y + 1$$

$$\text{ack}(x, 0) := \text{ack}(x - 1, 1)$$

$$\text{ack}(x, y) := \text{ack}(x - 1, \text{ack}(x, y - 1)), x > 0 \wedge y > 0.$$

Für die Behandlung derartiger Funktionen ist ein zusätzliches Konstruktionsprinzip notwendig.



■ Minimalisierung eines Prädikats:

- Sei $P(y, x_1, \dots, x_n)$ ein Prädikat. Dann ist

$$\min_y P(y, x_1, \dots, x_n)$$

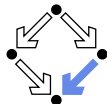
diejenige (partielle) Funktion, die x_1, \dots, x_n auf den kleinsten Wert y abbildet, für den $P(y, x_1, \dots, x_n)$ wahr ist. Falls kein solches y existiert, ist das Ergebnis der Funktion undefiniert.

- Die Klasse \mathcal{R} der μ -rekursiven Funktionen ist wie folgt definiert:

- Die Grundfunktionen gehören zu \mathcal{R} .
- Alle Funktionen, welche durch Komposition, Rekursion, und Minimalisierung aus Funktionen (und Prädikaten) in \mathcal{R} entstehen, gehören zu \mathcal{R} .

(Keine andere Funktion gehört zu \mathcal{R} .)

Die Klasse der μ -rekursiven Funktionen ist genau die Klasse der Turing-berechenbaren Funktionen.



Wie kann man sich den Unterschied zwischen \mathcal{PR} und \mathcal{R} vorstellen?

■ **Primitiv rekursive Funktionen:**

- Ein Argument, das in jedem “rekursiven Aufruf” kleiner wird.
 - “Termination” der Rekursion ist garantiert.
- Entspricht Programmen, die mit Zählschleifen (aber nicht mit allgemeinen while-Schleifen) operieren.

Jede primitiv rekursive Funktion kann durch ein Programm realisiert werden, das nur mit (Zuweisungen, Verzweigungen und) Zählschleifen arbeitet.

■ **μ -rekursive Funktionen:**

- Die “Minimalisierung” entspricht einer unbegrenzten “Suche”.
 - “Termination” der Suche ist nicht garantiert.
- Entspricht Programmen, die mit allgemeinen while-Schleifen operieren (deren Termination nicht von vornherein garantiert ist).

Jede μ -rekursive (aber nicht primitiv rekursive) Funktion kann nur durch ein Programm realisiert werden, das mit allgemeinen Schleifen (oder Rekursion) arbeitet.



Die Ackermann-Funktion ist μ -rekursiv.

$$\begin{aligned} A(m, n) &= \min_z z = \text{ack}(m, n) \\ &= \min_z \exists d. d \text{ ist die logische Herleitung von} \\ &\quad z = \text{ack}(m, n) \end{aligned}$$

- Das Gleichungssystem ack kann als Zahl codiert werden.
- Eine logische Herleitung d kann als Zahl codiert werden.
- Das Prädikat “ist logische Herleitung von ...” ist μ -rekursiv.
 - Ein formaler Beweis ist algorithmisch überprüfbar.
- Der Quantor $\min_z \exists d$ ist μ -rekursiv beschreibbar.
 - Bestimme $\min_{(z,d)}$ mit der gewünschten Eigenschaft und extrahiere z .

Jede durch ein “Rekursionsschema” beschreibbare Funktion ist μ -rekursiv.