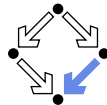


Berechenbarkeit und Komplexität

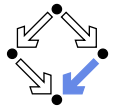
Die Chomsky-Hierarchie

Wolfgang Schreiner
Wolfgang.Schreiner@risc.jku.at

Research Institute for Symbolic Computation (RISC)
Johannes Kepler University, Linz, Austria
<http://www.risc.jku.at>



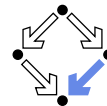
Sprachen und Automaten



- **Reguläre Sprachen**
 - Durch reguläre Ausdrücke beschreibbar.
 - Durch endliche Automaten erkennbar (und entscheidbar).
- **Rekursiv aufzählbare Sprachenn**
 - Durch . . . beschreibbar?
 - Durch Turing-Maschinen erkennbar (nicht unbedingt entscheidbar).
- **Zusammenhang**
 - Jede reguläre Sprache ist rekursiv aufzählbar (sogar rekursiv).
 - Jeder endliche Automat ist durch eine Turing-Maschine simulierbar.

Gibt es noch andere interessante Sprachklassen und dazugehörige Automatenmodelle und wie hängen diese mit den obigen zusammen?

Grammatiken



Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$

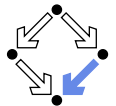
- N . . . die Menge der Nonterminalsymbole.
- Σ . . . die Menge der Terminalsymbole
 - $N \cap \Sigma = \emptyset$
- P . . . die Menge der Ersetzungsregeln der Form $\alpha \rightarrow \beta$
 - $\alpha \in (N \cup \Sigma)^* \circ N \circ (N \cup \Sigma)^*$
 - $\beta \in (N \cup \Sigma)^*$

Die linke Seite α enthält mindestens ein Nonterminalsymbol; die rechte Seite β enthält beliebige Symbole.

- $S \in N$. . . das Satzsymbol.

G beschreibt eine Sprache über dem Alphabet Σ .

Satzformen und Sätze



Gegeben ist eine Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$.

- **Eine direkte Ableitung $\omega \Rightarrow \omega'$ in G :**
 - $\omega = \omega_1 \alpha \omega_2, \omega' = \omega_1 \beta \omega_2$
 - $(\alpha \rightarrow \beta) \in P$
 - Für beliebige $\omega_1, \omega_2 \in (N \cup \Sigma)^*$.
- **Eine Ableitung $\omega \Rightarrow^* \omega'$**
 - Eine Verkettung direkter Ableitungen $\omega \Rightarrow \dots \Rightarrow \omega'$.
- **α ist eine Satzform in G :**
 - $S \Rightarrow^* \alpha$
 - α kann aus dem Satzsymbol abgeleitet werden.
- **α ist ein Satz in G :**
 - α ist eine Satzform in G , die nur aus Terminalsymbolen besteht.
- **Die Sprache $L(G)$ von G :**
 - $L(G) := \{\alpha \mid \alpha \text{ ist ein Satz von } G\}$

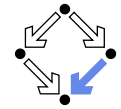
Beispiel



- Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$.
 - $N = \{S, A, B\}$
 - $\Sigma = \{a, b, c\}$
 - $P = \{S \rightarrow Ac, A \rightarrow aB, A \rightarrow BBb, B \rightarrow b, B \rightarrow ab\}$
 - $P = \{S \rightarrow Ac, A \rightarrow aB|BBb, B \rightarrow b|ab\}$
- Herleitung von Sätzen von G :
 - $S \Rightarrow Ac \Rightarrow aBc \Rightarrow abc$
 - $S \Rightarrow Ac \Rightarrow BBbc \Rightarrow abBbc \Rightarrow ababbc$
 - ...
- Die Sprache $L(G)$:
 - $L(G) = \{abc, aabc, bbbc, babbc, abbbc, ababbc\}$

Enthält eine Grammatik G eine "rekursive" Regel der Form $\omega_1 A \omega_2 \Rightarrow \omega_3 A \omega_4$, dann kann die Sprache $L(G)$ auch unendlich sein.

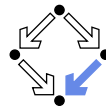
Reguläre und Rekursive Sprachen



- **Satz:** Jede rekursiv aufzählbare Sprache ist durch eine Grammatik beschreibbar.
 - Grammatiken sind gleich ausdrucksstark wie Turing-Maschinen.
- **Satz:** Jede reguläre Sprache ist durch eine rechtslineare Grammatik beschreibbar.
 - Jede Regel einer rechtslinearen Grammatik hat eine der beiden Formen $A \rightarrow \alpha$ oder $A \rightarrow \alpha B$.
 - $A, B \in N$.
 - $\alpha \in \Sigma^*$.

Man kann Sprachen anhand von Einschränkungen der zu ihrer Beschreibung erforderlichen Grammatiken kategorisieren.

Die Chomsky-Hierarchie

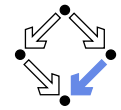


Noam Chomsky, 1959.

Typ	Grammatik	Erzeugte Sprache	Erkennender Automat
0	unbeschränkt	rekursiv aufzählbar	Turing-Maschine
1	kontextsensitiv	kontextsensitiv	linear beschränkter Automat
2	kontextfrei	kontextfrei	Kellerautomat
3	rechtslinear	regulär	endlicher Automat

- Die Menge der Sprachen vom Typ $i + 1$ ist eine echte Teilmenge der Menge der Sprachen vom Typ i .
- Jeder Automat vom Typ $i + 1$ kann durch einen Automaten vom Typ i simuliert werden (aber nicht umbekehrt).

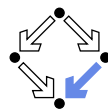
Die Chomsky-Hierarchie (eingebettet)



Typ	Grammatik	Erzeugte Sprache	Erkennender Automat
-	-	<i>überabzählbar unendlich</i>	-
-	-	<i>abzählbar unendlich</i>	-
0	unbeschränkt	rekursiv aufzählbar	Turing-Maschine (TM)
-	-	<i>rekursiv</i>	<i>stets haltende TM</i>
1	kontextsensitiv	kontextsensitiv	linear beschränkter Automat
2	kontextfrei	kontextfrei	Kellerautomat
3	rechtslinear	regulär	endlicher Automat
-	-	<i>endlich</i>	<i>(endliche Tabelle)</i>

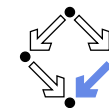
$\text{endlich} \subset \text{regulär} \subset \text{kontextfrei} \subset \text{kontextsensitiv} \subset \text{rekursiv} \subset \text{rekursiv aufzählbar} \subset \text{abzählbar unendlich} \subset \text{überabzählbar unendlich}$

Beispiele



- Endlich:
 - $\{a, aa, aaa\}$
- Typ 3 (regulär, nicht endlich):
 - $\{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- Typ 2 (kontextfrei, nicht regulär):
 - $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- Typ 1 (kontextsensitiv, nicht kontextfrei):
 - $\{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- Rekursiv (nicht kontextsensitiv):
 - $\{\alpha_i \mid \alpha_i \text{ ist nicht Satz der kontextsensitiven Grammatik } i\}$
- Typ 0 (rekursiv aufzählbar, nicht rekursiv):
 - $\{\alpha_i \mid \alpha_i \text{ wird von Turingmaschine } i \text{ erkannt}\}$
- Abzählbar unendlich (nicht rekursiv aufzählbar):
 - $\{\alpha_i \mid \alpha_i \text{ wird nicht von Turingmaschine } i \text{ erkannt}\}$
- Überabzählbar unendlich (nicht abzählbar unendlich):
 - Die Menge aller formalen Sprachen.

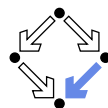
Kontextsensitive Sprachen (Typ 1)



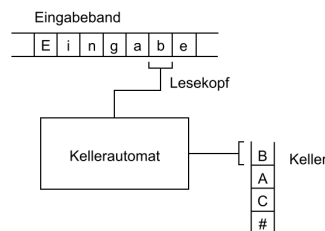
- **Kontextsensitive Grammatik:**
 - In jeder Regel $\alpha \rightarrow \beta$ gilt $|\alpha| \leq |\beta|$.
 - Die Regel $S \rightarrow \epsilon$ ist nur zugelassen, wenn S in keiner Regel auf der rechten Seite vorkommt.
- **Beispiel:** $L = \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$
 - $S \rightarrow aSBC \mid aBC, CB \rightarrow HB, HB \rightarrow HC, HC \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc$
 - $S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaBCBC \Rightarrow aaBHBC \Rightarrow aaBHCC \Rightarrow aaBBCC \Rightarrow aabBCC \Rightarrow aabbCC \Rightarrow aabbCC \Rightarrow aabbcc$
- **Linear beschränkter Automat:** eine nichtdeterministische Turingmaschine mit k -Bändern, die sich auf jedem Band nur auf dem Bereich der Länge n des Eingabeworts bewegt.
 - Der Automat hat $n * k$ Bandzellen (also nur ein linear Vielfaches der Länge des Eingabeworts) als "Arbeitsspeicher" zur Verfügung.

Kontextsensitive Sprachen haben heute keine praktische Bedeutung.

Kontextfreie Sprachen (Typ 2)

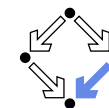


- **Kontextfreie Grammatik:**
 - Jede Regel hat die Form $A \rightarrow \beta$ mit $A \in N$.
 - Das Nonterminal-Symbol A kann unabhängig von dem Kontext, in dem es vorkommt, ersetzt werden.
- **Beispiel:** $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$
 - $S \rightarrow \epsilon \mid aSb$
 - $S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaabbb$.
- **Kellerautomat:** ein nichtdeterministischer endlicher Automat mit einem Keller (stack) als Arbeitsspeicher:
 - In jedem Zug ist die Aktion auch vom obersten Symbol des Kellers abhängig.
 - Das oberste Symbol wird durch eine (auch leere) Symbolfolge ersetzt.
 - Das Eingabesymbol muss nicht unbedingt gelesen werden.



Praktisch alle in der Informatik verwendeten Sprachen sind kontextfrei.

Erzeugung von Syntaxanalytoren



"Compilergeneratoren" zur Erzeugung von Syntaxanalytoren.

- **Eingabe:** eine (deterministische) kontextfreie Grammatik.

```
statement: assignment | conditional | whileloop | ... ;
whileloop: 'while' '(' valexp ')' statement ;
```
- **Ausgabe:** ein (deterministischer) Kellerautomat (als Programm).

```
public final LoopStatement whileloop() throws ... {
    ...
    pushFollow(FOLLOW_valexp_in_whileloop1457);
    valexp();
    state._fsp--;
    if (state.failed) return value;
    ...
    pushFollow(FOLLOW_statement_in_whileloop1484);
    statement();
    state._fsp--;
    if (state.failed) return value;
    ...
}
```