Aufgabe 31. Zeigen Sie, dass die Funktion f, die durch $f(n) = n$-te positive gerade Zahl ($f(0) = 2,\ f(1) = 4,\ f(2) = 6, \dots$) definiert ist, primitiv rekursiv ist.
Benutzen Sie zum Beweis lediglich die Definitionen 1.5.1 bis 1.5.4 aus dem Skriptum analog zu Beispiel 1.5.1.

Aufgabe 32. Man definiere die Funktionen $\varphi_d(x,y) = x^y$, $\varphi_e(x,y) = x \dot{-} 1$, $\varphi_f(x,y) = x \dot{-} y$ und $\varphi_g(x,y) = |x-y|$ (Beispiel 1.5.1 Skriptum) formal durch Komposition und primitive Rekursion, ausgehend von den Grundfunktionen und von Funktionen für die eine solche Darstellung bereits angegeben wurde.

Aufgabe 33. Zeigen Sie: Die Prädikate

1. „x ist 3. Potenz einer natürlichen Zahl“,
2. „x hat mindestens m Teiler“ ($x, m \in \mathbb{N}$)

sind primitiv rekursiv.

Aufgabe 34. Sei eine Funktion f definiert als

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Man kann sich nun folgende Prozedur vorstellen. Man wähle eine positive natürliche Zahl und wende f darauf an. Ist das Ergebnis gleich 1, so stoppe man, anderenfalls, wende man wieder f auf das Ergebnis an und führe das Verfahren solange fort, bis man eine 1 als Ergebnis erhält.
Sei ν eine Funktion, die als Input positive natürliche Zahlen akzeptiert und als Ausgabe die Anzahl der Iterationen ausgibt, die im obigen Verfahren notwendig sind, um als Ergebnis für f eine 1 zu erhalten.
Zeigen Sie dass, ν eine rekursive Funktion ist. Sie können dabei alle Sätze aus dem Skriptum verwenden.
Sehr schwierige Zusatzaufgabe: Ist ν sogar primitiv rekursiv?

Aufgabe 35. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die (partielle) Funktion

$$\begin{gathered} f(x) = \text{ein solches } y, \text{ so dass } x = y^2 \\ (\text{undefiniert, wenn kein solches } y \text{ existiert}) \end{gathered}$$

1. Stellen Sie diese Funktion mittels der Grundfunktionen, der Komposition, Rekursion und Minimalisierung dar. Dabei dürfen Sie zusätzlich als bekannt voraussetzen, dass die Funktion $m : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x,y) \mapsto x \cdot y$ und das Gleichheitsprädikat $d : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y, \\ 0 & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

   primitiv rekursiv sind.
2. Warum kommt man bei dieser Darstellung nicht ohne die Minimalisierung aus?