Gelöste Aufgaben:

46	47	48	49	50

Name:

Matrikel-Nr.:

Aufgabe 46. Seien Wörter w_i und x_i über $\{0, 1\}$ wie folgt gegeben.

	Liste A	Liste B
i	w_i	x_i
1	110	11
2	110	10
3	11	110
4	010	101

Bestimmen Sie eine Lösung des Post'schen Korrespondenzproblems oder zeigen Sie, dass keine Lösung existiert.

Aufgabe 47. Sei A eine rekursiv aufzählbare Sprache und B eine Sprache, die rekursiv aufzählbar bezüglich A ist. Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Falls A rekursiv ist, ist B rekursiv aufzählbar.
2. Falls B rekursiv bezüglich A ist, ist B rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 48. In der Vorlesung wurde erwähnt, dass das Erfüllbarkeitsproblem (SAT) NP-vollständig ist. Als Verknüpfungen waren dabei die Negation ($\neg$), die Und-Verknüpfung ($\wedge$) und die Oder-Verknüpfung ($\vee$) zugelassen. Was passiert, wenn wir zusätzlich auch noch die Implikation ($\Rightarrow$) zulassen? Ist das so erhaltene erweiterte Erfüllbarkeitsproblem (SAT+ $\Rightarrow$) auch NP-vollständig?

Aufgabe 49. Sei $L \subset \{0, 1\}^*$ die Menge aller natürlichen Zahlen in Binärdarstellung, die sich als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben lassen, und sei $\overline{L} = \{0, 1\}^* \setminus L$.

1. Liegt L in NP?
2. Liegt $\overline{L}$ in coNP?
3. Zeigen Sie, dass das Problem in P liegt, sofern man Unärdarstellung anstatt Binärdarstellung verwendet.

Begründen Sie Ihre Antworten! *Hinweis:* Beachten Sie: wenn $n = a^2 - b^2$, dann $a \leq n$ und $b \leq n$ (warum?) *Zusatzfrage:* Mit welchem bekannten Problem ist L eng verwandt?

Aufgabe 50. (a) Geben Sie eine Polynom-Zeit Reduktion des Problems der Hamiltonschen Zyklen (HZ, Folie 5 zur Problemkomplexität) auf das Erfüllbarkeitsproblem (SAT, Folie 10 zur Problemkomplexität) an.

(b) Was folgt aus der Existenz dieser Reduktion?
Anleitung für Teil (a): Als Eingabe nimmt die Reduktion eine Instanz von HZ, also einen Graphen, und die Ausgabe ist eine Instanz des Erfüllbarkeitsproblems, also eine Boolsche Formel. Sei $\{1, 2, \ldots, n\}$ die Menge der Knoten im Graphen. Die Boolsche Formel enthält n^2 Variablen $x_{1,1}, \ldots, x_{n,n}$, mit der Bedeutung:

$$x_{t,k} \Leftrightarrow \text{Station Nummer } t \text{ am Hamiltonschen Zyklus ist Knoten } k$$

Die SAT-Instanz drückt folgende Aussagen aus:

- zu jedem Zeitpunkt ist der Reisende in mindestens einem Knoten,
- zu keinem Zeitpunkt ist der Reisende in mindestens zwei Knoten,
- alle Knoten des Graphen liegen auf dem Hamiltonschen Zyklus,
- der Reisende bewegt sich nur entlang von Kanten des Graphen des Problems HZ.