Gelöste Aufgaben:

31	32	33	34	35

Name:

Matrikel-Nr.:

Aufgabe 31. Geben Sie kontextfreie Grammatiken an, die folgende Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ generieren.

(a) $L_1 = \{w \mid w \text{ hat wenigstens zwei Nullen.}\}$

(b) $L_2 = \{w \mid w \text{ beginnt und endet mit demselben Buchstaben.}\}$

(c) $L_3 = \{w \mid \text{Die Länge von } w \text{ ist ungerade und 0 ist der Buchstabe in der Mitte.}\}$

(d) $L_4 = L_2 \cap L_3$

Aufgabe 32. Sei $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Weiterhin sei für eine natürliche Zahl $n > 0$ das Wort w_n gegeben als die ersten n Nachkommastellen in der Dezimaldarstellung von e und $L = \{w_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

(a) Gibt es eine Grammatik G mit Σ als Menge der Terminalsymbole, so dass $L(G) = L$.

(b) Ist L eine kontextfreie Sprache?

Beweisen Sie Ihre Aussagen.
Hinweis: Für den Beweis des zweiten Teils der Aufgabenstellung müssen Sie weiterführende Literatur verwenden. Machen Sie sich mit dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen vertraut.

Aufgabe 33. Zeigen Sie, dass die Funktion f, die durch $f(n) = n$-te ungerade Zahl ($f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 5, \ldots$) definiert ist, primitiv rekursiv ist.
Benutzen Sie zum Beweis lediglich die Definitionen 1.5.1 bis 1.5.4 aus dem Skriptum analog zu Beispiel 1.5.1.

Aufgabe 34. Man definiere die Funktionen $\varphi_d(x, y) = x^y$, $\varphi_e(x, y) = x \dot{-} 1$, $\varphi_f(x, y) = x \dot{-} y$ und $\varphi_g(x, y) = |x - y|$ (Beispiel 1.5.1 Skriptum) formal durch Komposition und primitive Rekursion, ausgehend von den Grundfunktionen und von Funktionen für die eine solche Darstellung bereits angegeben wurde.

Aufgabe 35. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die (partielle) Funktion

$$f(x) = \text{ein solches } y, \text{ so dass } x = y^2$$
$$\text{(undefiniert, wenn kein solches } y \text{ existiert)}$$

1. Stellen Sie diese Funktion mittels der Grundfunktionen, der Komposition, Rekursion und Minimalisierung dar. Dabei dürfen Sie zusätzlich als bekannt voraussetzen, dass die Funktion $m : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ und das Gleichheitsprädikat $d : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y, \\ 0 & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

primitiv rekursiv sind.

2. Warum kommt man bei dieser Darstellung nicht ohne die Minimalisierung aus?