Blatt 1

Bekomp WS 2011
21. 10. 2011

Name:
Matrikelnr.:
Gelöste Aufgaben: 1 2 3 4 5

Wir machen uns mit indirekten Beweisen und Induktionsbeweisen vertraut. Indirekte Beweise fallen anfangs vielleicht ein wenig schwer, sind aber für die Berechenbarkeitstheorie unabdingbar.

1. Zeigen Sie
$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}: \quad x^2 + y^4 = 10 \implies x \leq 4.$$
Hinweis: Um $A \implies B$ zu zeigen, kann man aus $A \wedge \neg B$ einen Widerspruch herleiten (*indirekter Beweis*).

2. Zeigen Sie $\sqrt[3]{5} \notin \mathbb{Q}$ durch einen indirekten Beweis. *Hinweis:* Der indirekte Beweis kann analog zum indirekten Beweis von $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ geführt werden, der sich auf `http://en.wikipedia.org/wiki/Square_root_of_2#Proofs_of_irrationality` unter *Proof by infinite descent* findet.

3. Zeigen Sie
$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sum_{k=0}^{n} a^{2k} = \frac{a^{2n+2} - 1}{a^2 - 1}$$
durch vollständige Induktion.

4. Zwei Folgen f und g seien rekursiv gegeben durch
$$f(n+1) = 2f(n) + 4, \qquad f(0) = 0,$$
$$g(n+1) = 3g(n) + 5, \qquad g(0) = 0.$$
Zeigen Sie
$$\forall n \in \mathbb{N}: \ f(n) \leq g(n)$$
durch vollständige Induktion.

5. Sei $f_1, f_2, f_3, \ldots$ eine Folge von Folgen natürlicher Zahlen. Wir schreiben $f_i(n)$ für die n-te Zahl der i-ten Folge. Sei g die durch $g(n) = f_n(n) + 1$ gegebene Folge. Zeigen Sie
$$\forall i \in \mathbb{N}: \quad g \neq f_i,$$
dass also die Folge g verschieden von allen Folgen in $f_1, f_2, f_3, \ldots$ ist. *Hinweis:* Indirekter Beweis. Angenommen es gäbe ein i, sodass g und f_i die gleichen Zahlenfolgen wären, also $g = f_i$. Berechnen von $g(i)$ führt nun auf eine Widerspruch.

Bitte achten Sie auf logisch korrekte Formulierungen Ihrer Beweise, denn genau das wollen wir hier üben!

Abgabemodus: Heften Sie Ihre schriftlich ausgearbeiteten Lösungen zusammen und geben Sie alles zusammen am Anfang Ihrer Übungsstunde am 21. 10. 2011 bei Ihrem Übungsleiter ab. Den ausgedruckten Angabezettel verwenden Sie dabei als Deckblatt. Rechts oben kringeln Sie die Nummer jeder vollständige gelösten Aufgabe ein. Das wird gezählt, und die Lösungen werden stichprobenartig korrigiert. Logisch richtige Formulierungen sind erwünscht, weil Lehrziel. Gut lesbare Schrift ermöglicht die Korrektur. Heftklammern (Klammermaschine) halten besser als Büroklammern (Halteproblem).