Aufgabe 46. Sei $L \subset \{0,1\}^*$ die Menge aller natürlichen Zahlen in Binärdarstellung, die sich als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben lassen, und sei $\overline{L} = \{0,1\}^* \setminus L$.

1. Liegt L in NP?
2. Liegt $\overline{L}$ in coNP?
3. Zeigen Sie, dass das Problem in P liegt, sofern man Unärdarstellung anstatt Binärdarstellung verwendet.

Begründen Sie Ihre Antworten! *Hinweis:* Beachten Sie: wenn $n = a^2 - b^2$, dann $a \leq n$ und $b \leq n$ (warum?) *Zusatzfrage:* Mit welchem bekannten Problem ist L eng verwandt?

Aufgabe 47. (a) Geben Sie eine Polynom-Zeit Reduktion des Problems der Hamiltonschen Zyklen (HZ, Folie 5 zur Problemkomplexität) auf das Erfüllbarkeitsproblem (SAT, Folie 10 zur Problemkomplexität) an.

(b) Was folgt aus der Existenz dieser Reduktion?
Anleitung für Teil (a): Als Eingabe nimmt die Reduktion eine Instanz von HZ, also einen Graphen, und die Ausgabe ist eine Instanz des Erfüllbarkeitsproblems, also eine Boolsche Formel. Sei $\{1, 2, \ldots, n\}$ die Menge der Knoten im Graphen. Die Boolsche Formel enthält n^2 Variablen $x_{1,1}, \ldots, x_{n,n}$, mit der Bedeutung:

$$x_{t,k} \Leftrightarrow \text{Station Nummer } t \text{ am Hamiltonschen Zyklus ist Knoten } k$$

Die SAT-Instanz drückt folgende Aussagen aus:

- zu jedem Zeitpunkt ist der Reisende in mindestens einem Knoten,
- zu keinem Zeitpunkt ist der Reisende in mindestens zwei Knoten,
- alle Knoten des Graphen liegen auf dem Hamiltonschen Zyklus,
- der Reisende bewegt sich nur entlang von Kanten des Graphen des Problems HZ.

Aufgabe 48. Zeigen Sie, dass SAT NP-vollständig ist. (Satz von Cook, Folie 10 zur Problemkomplexität).
Anleitung: Sei L ein beliebiges Problem in NP.
Dann gibt es eine nichtdeterministische Turingmaschine M und ein Polynom p, so dass für jedes Wort w der Länge n auf M genau dann eine akzeptierende Berechnung in höchstens $p(n)$ Schritten existiert, falls $w \in L$.
Diese Berechnung beschreiben wir durch Boolsche Variablen:

1. $x_{t,k} \Leftrightarrow$ Zum Zeitpunkt t ist die Berechnung im Zustand q_k.
2. $y_{t,i} \Leftrightarrow$ Zum Zeitpunkt t steht der Kopf über Bandzelle i.
3. $z_{t,i,k} \Leftrightarrow$ Zum Zeitpunkt t steht in Bandzelle i das Symbol γ_k aus dem Bandalphabet $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$.

Dann lässt sich Folgedes durch Aussagen ausdrücken:

1. Zu jedem Zeitpunkt gilt: M ist in genau einem Zustand, der Kopf über genau einer Bandzelle, und jede Bandzelle enthält genau ein Zeichen.
2. Am Anfang, also zum Zeitpunkt $t = 0$, steht w am Band (gefolgt von Blanks); M ist im Zustand q_0, und der Kopf ist über dem linkesten Feld.
3. Der Übergang von t zu $t+1$ ist konform zu δ. (Hier muss man am meisten arbeiten.)
4. Die Berechnung akzeptiert: Zum Zeitpunkt $t = p(n)$ sind wir in einem akzeptierenden Zustand. (Kommen wir früher in einem akzeptierenden Zustand an, verweilen wir einfach dort.)

Sei E die Konjunktion dieser vier Teilformeln. Zeigen Sie nun, dass genau dann eine w akzeptierende Berechnung auf M existiert, falls E erfüllbar ist.

Aufgabe 49. Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L'_{u,\varepsilon} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ akzeptiert } \varepsilon \text{ nicht}\}$$

nicht rekursiv aufzählbar ist.

Aufgabe 50. Sei A eine rekursiv aufzählbare Sprache und B eine Sprache, die rekursiv aufzählbar bezüglich A ist. Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Falls A rekursiv ist, ist B rekursiv aufzählbar.
2. Falls B rekursiv bezüglich A ist, ist B rekursiv aufzählbar.