Aufgabe 41. Sei $M_1, M_2, M_3, \ldots$ eine Auflistung aller Turing-Maschinen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Sei $w_1, w_2, w_3, \ldots$ die durch $w_i = 10^i 10^i 1$ gegebene Folge von Wörtern. Sei $A = \{w_i \mid i \in \mathbb{N} \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w_i\}$ und $\overline{A} = \Sigma^* \setminus A$.

(a) Ist $\overline{A}$ rekursiv aufzählbar? Beweisen Sie Ihre Antwort!

(b) Zeigen Sie: Mit Hilfe einer (hypothetischen) Entscheidungsprozedur für das Halteproblem könnte man eine Turing-Maschine konstruieren, deren akzeptierte Sprache $\overline{A}$ ist.

(c) Was folgt aus (a) und (b) für die Entscheidbarkeit des Halteproblems?

Aufgabe 42. Die Sprachen L_1 und L_2 seien rekursiv aufzählbar.

(a) Folgt, dass $L_1 \cap L_2$ rekursiv aufzählbar ist?

(b) Folgt, dass $L_1 \cup L_2$ rekursiv aufzählbar ist?

(c) Folgt, dass $\overline{L_1}$ rekursiv aufzählbar ist?

Die Sprache L und ihr Komplement $\overline{L}$ seien rekursiv aufzählbar.

(d) Folgt, dass L rekursiv ist?

Begründen Sie, wie immer, Ihre Antworten!

Aufgabe 43. Ist entscheidbar, ob eine als Eingabe gegebene Turingmaschine M je den Zustand q_8 erreicht, wenn sie auf das leere Wort angewandt wird?

Aufgabe 44. Welche der unten gelisteten Probleme sind entscheidbar? Eine Instanz dieser Probleme ist der Kode $\langle M \rangle$ einer Turingmaschine M mit dem Eingabealphabet $\{0, 1\}$. Die Problemfragen sind:

(a) Hat M mindestens 4 Zustände?

(b) Gilt $L(M) \subseteq \{0, 1\}^*$?

(c) Ist $L(M)$ kontextfrei?

(d) Ist $L(M)$ endlich?

(e) Ist $10101 \in L(M)$?

Begründen Sie Ihre Antworten für Fragen b – e exakt!

Aufgabe 45. (a) Gegeben ist eine Turingmaschine M. Geben Sie eine Grammatik G mit folgender Eigenschaft an:

$$L(G) \neq \emptyset \iff M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon. \tag{1}$$

(b) Ist entscheidbar, ob eine Grammatik G die Eigenschaft $L(G) \neq \emptyset$ hat? Warum? Warum nicht? Begründen Sie Ihre Antwort! (Eine Instanz diese Problems ist eine als Bitstring kodierte Grammatik.)

(c) Ist entscheidbar, ob zwei Grammatiken G_1 und G_2 die gleichen Sätze erzeugen? Warum? Warum nicht? Begründen Sie Ihre Antwort! (Eine Instanz diese Problems ist ein Bitstring, der ein Paar (G_1, G_2) von Grammatiken kodiert.)