Aufgabe 1. Eine Funktion ist durch $f(0) = 1$ und $f(n+1) = 2f(n)$ für $n \geq 0$ gegeben. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $f(n) = 2^n$ für $n \geq 0$.

Aufgabe 2. Eine Funktion ist durch $f(0) = 1$ und $f(n+1) = (n+1) \cdot f(n)$ für $n \geq 0$ gegeben. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $f(2n)/f(n)^2 \leq 4^n$ für alle natürlichen Zahlen n gilt.

Aufgabe 3. Eine Folge L_n von Sprachen sei rekursiv durch $L_0 = \{a\}$ und $L_{n+1} = L_n \circ L_n \cup \{b\}$ für $n \geq 0$ gegeben.

(a) Berechnen Sie L_1 und L_2.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$|L_n| \leq f_n$$

wobei die Folge f_n durch $f_0 = 1$ und $f_{n+1} = f_n^2 + 1$ für alle $n \geq 0$ gegeben ist.

Definition:

$$L_1 \circ L_2 = \{xy \mid x \in L_1 \wedge y \in L_2\}$$

bezeichnet die Konkatenation zweier Sprachen, wobei xy die Konkatenation der beiden Worte x und y bezeichnet.
Mit $|L|$ wird die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge L bezeichnet.

Aufgabe 4. Sei

$$W = \{X \ : \ X \notin X\}$$

die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Leiten Sie einen Widerspruch ab. *Hinweis:* Unterscheiden Sie die beiden Fälle $W \in W$ und $W \notin W$.

Aufgabe 5. Geben sie einen deterministischen endlichen Automaten D über dem Alphabet $\{0, 1\}$ an, dessen akzeptierte Sprache $L(D) = \{01\}$ ist.

(a) Zeichnen Sie den zugehörigen Überführungsgraphen.

(b) Geben Sie die Bestandteile des definierenden Quintupels explizit an.

(c) Was muß geändert werden, damit der Automat auch alle endlichen Wiederholungen der Zeichenkette 01 akzeptiert? (Das leere Wort soll nicht akzeptiert werden.)