Aufgabe 51. Sei A eine rekursiv aufzählbare Sprache und B eine Sprache, die rekursiv aufzählbar bezüglich A ist. Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Falls A rekursiv ist, ist B rekursiv aufzählbar.
2. Falls B rekursiv bezüglich A ist, ist B rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 52. In der Vorlesung wurde erwähnt, dass das Erfüllbarkeitsproblem (SAT) NP-vollständig ist. Als Verknüpfungen waren dabei die Negation ($\neg$), die Und-Verknüpfung ($\wedge$) und die Oder-Verknüpfung ($\vee$) zugelassen. Was passiert, wenn wir zusätzlich auch noch die Implikation ($\Rightarrow$) zulassen? Ist das so erhaltene erweiterte Erfüllbarkeitsproblem (SAT+ $\Rightarrow$) auch NP-vollständig?

Aufgabe 53. Betrachten Sie folgendes Problem (LZ), das von der Lösbarkeit eines Ungleichungssystems über $\mathbb{Z}$ handelt:
Probleminstanz: Eine Matrix A und ein Vektor b, jeweils mit Einträgen in $\mathbb{Z}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Problemfrage: Gibt es einen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit ganzzahligen Einträgen, so dass

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geq b_i$$

für alle $1 \leq i \leq m$.
Zeigen Sie die NP-Schwierigkeit des Problems LZ durch Angabe einer Polynomzeitreduktion von SAT.
Bemerkung: Die Eingabe (A, b) ist dabei wie folgt über dem Alphabet $\Sigma = \{+, -, 0, 1, \#\}$ codiert:

$$a_{1,1}\# \dots \# a_{1,n}\#\# \dots a_{m,1}\# \dots \# a_{m,n}\#\#\# b_1\# \dots \# b_m$$

wobei die einzelnen Zahlen binär (mit Vorzeichen) dargestellt werden.
Sie dürfen annehmen, daß einen Instanz eines SAT-Problems in konjunktiver Normalform gegeben ist.
Hinweis: TRUE wird in 1 übersetzt FALSE in 0.
Beispiel der Reduktion: Die SAT-Instanz

$$X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3$$

wird in die die Instanz

$$x_1 + x_2 + (1 - x_3) \geq 1 \wedge 0 \leq x_1 \leq 1 \wedge 0 \leq x_2 \leq 1 \wedge 0 \leq x_3 \leq 1$$

übersetzt.

Aufgabe 54. Geben Sie eine Polynom-Zeit Reduktion des Problems der Hamiltonschen Zyklen (HZ) auf das Erfüllbarkeitsproblem (SAT) an. Was folgt aus der Existenz dieser Reduktion?

Hinweis: Als Eingabe nimmt die Reduktion eine Instanz von HZ, also einen Graphen, und die Ausgabe ist eine Instanz des Erfüllbarkeitsproblems, also eine Boolsche Formel. Sei $\{1, 2, \ldots, n\}$ die Menge der Knoten im Graphen. Die Boolsche Formel enthält n^2 Variablen $x_{1,1}, \ldots, x_{n,n}$, mit der Bedeutung:

$$x_{t,k} \Leftrightarrow \text{Station Nummer } t \text{ am Hamiltonschen Zyklus ist Knoten } k$$

Die SAT-Instanz drückt folgende Aussagen aus:

- zu jedem Zeitpunkt ist der Reisende in mindestens einem Knoten,
- zu keinem Zeitpunkt ist der Reisende in mindestens zwei Knoten,
- der Reisende bewegt sich nur entlang von Kanten des Graphen des Problems HZ.

Aufgabe 55. Betrachten Sie folgendes Entscheidungsproblem Z: Instanz: Eine natürliche Zahl n in Binärdarstellung. Frage: Gibt es natürliche Zahlen a und b, beide ungeich 1, mit $n = ab$? Zeigen Sie, dass Z in NP ist.