**Aufgabe 41.** Beweisen Sie: Seien $f(n)$ und $g(n)$ von der Ordnung $O(n)$. Dann gilt:

1. $(f+g)(n)$ ist von der Ordnung $O(n)$;
2. $(f \cdot g)(n)$ ist von der Ordnung $O(n^2)$.

Zeigen oder widerlegen Sie: Falls $g(n)$ von der Ordnung $O(f(n))$ ist, ist auch $2^{g(n)}$ von der Ordnung $O(2^{f(n)})$.

**Aufgabe 42.** Bestimmen Sie die Anzahl der Multiplikationen, die benötigt werden, um die Polynome

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \text{ und } b_1x^2 + b_2x + b_3$$

mit der klassischen und mit der Karatsuba Methode zu multiplizieren.

**Aufgabe 43.** Sei $M$ eine Turingmaschine mit $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{0,1,\sqcup\}$, $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$. Anfangszustand $q_1$, Endzustandsmenge $F = \{q_2\}$, Überführungsfunktion $\delta$. Wir bezeichnen die Symbole $0,1,\sqcup$ in dieser Reihenfolge mit $X_1, X_2, X_3$, die Bewegungsrichtungen $L, R$ mit $D_1, D_2$ (die stationäre Option 'S' kommt nicht vor). Eine Operation $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$ wird kodiert als $0^i10^j10^k10^l10^m$. Die Turingmaschine $M$ selbst wird kodiert als

$$111 code_1 11 code_2 \dots 11 code_r 111$$

wobei jedes $code_n$ die obige Form hat.
Gegeben sei der folgende Code einer Turingmaschine $M$

$$111010010100100110100010010001001 11$$

1. Ist $L(M) \subseteq \{1\}^+$?
2. Akzeptiert $M$ das Wort 0101?
3. Ist $L(M)$ regulär?
4. Akzeptiert $M$ das Wort 11111?
5. Sind $L(M)$ und $\{1\}^*$ identisch?

**Aufgabe 44.** Gegeben sei eine Turingmaschine $M$ mit folgender Eigenschaft: *Wenn $M$ ein Wort akzeptiert, dann tut sie das in weniger als 1000 Schritten.*

1. Ist $L(M)$ rekursiv aufzählbar?
2. Ist $L(M)$ rekursiv?
3. Ist die Eigenschaft von $L(M)$, das leere Wort zu enthalten, entscheidbar?
4. Ist $L(M)$ notwendigerweise endlich?