Aufgabe 31. Gegeben sei die folgende Turingmaschine $\mathcal{A}$:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$
$$\Sigma = \{0, 1\}$$
$$\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$$
$$F = \{q_3\}$$

Die Überführungsfunktion δ von $\mathcal{A}$ ist die folgende partielle Abbildung

$$Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$$
$$\delta(q_0, 1) = (q_0, 1, R)$$
$$\delta(q_0, 0) = \delta(q_1, 1) = (q_1, 1, R)$$
$$\delta(q_1, \sqcup) = (q_2, \sqcup, L)$$
$$\delta(q_2, 1) = (q_3, \sqcup, S)$$

Schreiben Sie eine Berechnung, beginnend mit dem Input

$$q_0 11101111$$

Formulieren Sie eine Vermutung, welche Funktion die Turingmaschine $\mathcal{A}$ berechnet.

Aufgabe 32. Zeigen Sie, dass die Funktion f, die durch $f(n) = n$-te ungerade Zahl ($f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, ...) definiert ist, primitiv rekursiv ist. Benutzen Sie zum Beweis lediglich die Definitionen 1.5.1 bis 1.5.4 aus dem Skriptum analog zu Beispiel 1.5.1.

Aufgabe 33. Sei f die primitiv rekursive Funktion, die durch die Rekursionsgleichungen

$$f(0, y) = 2, \quad f(x + 1, y) = f(x, y)^y$$

definiert ist.

1. Berechnen Sie $f(3, 3)$.
2. Kann f auch als Komposition der Grundfunktionen und der Funktionen $(x, y) \mapsto x + y$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, $(x, y) \mapsto x^y$ geschrieben werden?

Aufgabe 34. Man definiere die Funktionen $\varphi_d(x, y) = x^y$, $\varphi_e(x, y) = x \dot{-} 1$, $\varphi_f(x, y) = x \dot{-} y$ und $\varphi_g(x, y) = |x - y|$ (Beispiel 1.5.1 Skriptum) formal durch Komposition und primitive Rekursion, ausgehend von den Grundfunktionen und von Funktionen für die eine solche Darstellung bereits angegeben wurde.

Aufgabe 35. Beweisen Sie, dass die Funktionen $\lfloor \frac{1}{2} x \rfloor$, $\min(x, y)$ und $\max(x, y)$ primitiv rekursiv sind. (Hinweis: Verwenden Sie bekannte Tatsachen aus der Vorlesung.)