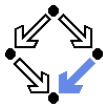


Berechenbarkeit und Komplexität

Random Access Machines

Wolfgang Schreiner
Wolfgang.Schreiner@risc.jku.at

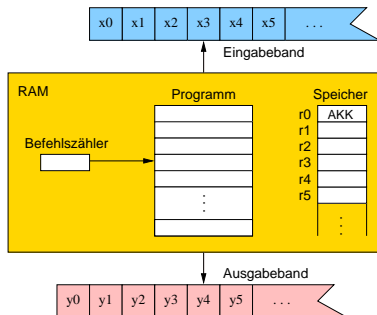
Research Institute for Symbolic Computation (RISC)
Johannes Kepler University, Linz, Austria
<http://www.risc.jku.at>



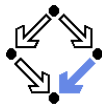
Random Access Machine (RAM)



- **Eingabeband** und **Ausgabeband**.
 - Unendliche Folge von **Feldern**.
 - Jedes Feld kann eine ganze Zahl enthalten.
- **Speicher**.
 - Unendliche Folge von **Registern**.
 - Jedes Register kann eine ganze Zahl enthalten.
 - Register 0 dient als **Akkumulator**.
- **Programm**.
 - Endliche Folge von **Instruktionen**.
 - Der **Befehlszähler** verweist auf die aktuelle Instruktion.



Modell eines Computers.



Ausführungsmodell der RAM

■ Zu Beginn:

- Alle Register enthalten 0.
- Der Befehlszähler zeigt auf die erste Instruktion.
- Alle Ausgabefelder sind leer.
- Nur endliche viele Eingabefelder sind nicht leer.
- Lese- und Schreibkopf zeigen auf das erste Feld des jeweiligen Bandes.

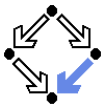
■ Jeder Schritt:

- Es wird die Instruktion ausgeführt, auf die der Befehlszähler verweist.
- Danach wird der Befehlszähler um eins erhöht.
 - Verweis auf die nächste Instruktion in Folge.
 - Ausnahme: Instruktionen JUMP, JGTZ, JZERO, HALT (siehe später).

■ Ausführung der Instruktion HALT:

- Die Berechnung endet.

Modell der Arbeit eines Computers.



Instruktionen der RAM

- Aufbau einer Instruktion:
 - Eine optionale **Marke**.
 - Ein **Operationscode**.
 - Eine **Adresse** (**Operand** oder **Marke**).
- Mögliche Formen von Operanden:
 - $=i$... die ganze Zahl i .
 - *Unmittelbare* Adressierung.
 - i ... der Inhalt des Registers mit der Nummer i .
 - *Direkte* Adressierung.
 - $*i$... der Inhalt desjenigen Registers, dessen Nummer im Register mit der Nummer i steht.
 - *Indirekte* Adressierung.

Eine einfache Maschinensprache.



Instruktionen der RAM

- 12 Instruktionen:

Operationscodes LOAD, STORE, ADD, SUB, MULT, DIV, READ, WRITE, JUMP, JGTZ, JZERO, HALT.

- Speicherfunktion $c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

- $c(i)$... der Inhalt des Registers r_i .

- $v : \text{Operand} \rightarrow \mathbb{Z}$

- $v(a)$... der Wert des Operanden a .

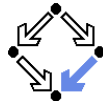
$$v(=i) = i$$

$$v(i) = c(i)$$

$$v(*i) = c(c(i))$$

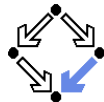
Die Bedeutung der Instruktionen wird mit Hilfe der Speicherfunktion und des Werts der Operanden definiert.

Instruktionen der RAM



1. LOAD $a: c(0) \leftarrow v(a)$
2. STORE $i: c(i) \leftarrow c(0)$
STORE $*i: c(c(i)) \leftarrow c(0)$
3. ADD $a: c(0) \leftarrow c(0) + v(a)$
4. SUB $a: c(0) \leftarrow c(0) - v(a)$
5. MULT $a: c(0) \leftarrow c(0) * v(a)$
6. DIV $a: c(0) \leftarrow \lfloor c(0)/v(a) \rfloor$
7. READ $i: c(i) \leftarrow \text{Eingabefeld}$ (Lesekopf rückt um eine Position nach rechts)
READ $*i: c(c(i)) \leftarrow \text{Eingabefeld}$ (Lesekopf rückt um eine Position nach rechts)
8. WRITE $a: \text{Ausgabefeld} \leftarrow v(a)$ (Schreibkopf rückt um eine Position nach rechts)
9. JUMP b : Befehlszähler wird auf die Nummer der Instruktion mit Marke b gesetzt.
10. JGTZ b : wenn $c(0) > 0$, wird der Befehlszähler auf die Nummer der Instruktion mit der Marke b gesetzt; ansonsten wird der Befehlszähler um 1 erhöht.
11. JZERO b : wenn $c(0) = 0$, wird der Befehlszähler auf die Nummer der Instruktion mit der Marke b gesetzt; ansonsten wird der Befehlszähler um 1 erhöht.
12. HALT: die Berechnung endet.

Die Bedeutung der RAM



Die Bedeutung einer RAM R ist durch ihre (partielle) Abbildung von Eingabebändern auf Ausgabebänder definiert.

- Interpretation der Abbildung als **Funktion**:

- R lese immer n Zahlen x_1, \dots, x_n vom Eingabeband und schreibe entweder eine Zahl y auf das Ausgabeband oder terminiere nicht.

- R berechnet damit die folgende Funktion $f : \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\text{partiell}} \mathbb{Z}$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} y, & \text{wenn } R \text{ auf } x_1, \dots, x_n \text{ terminiert und } y \text{ schreibt} \\ \perp, & \text{wenn } R \text{ auf } x_1, \dots, x_n \text{ nicht terminiert} \end{cases}$$

- Interpretation der Abbildung als **Sprache**:

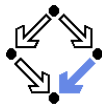
- Für ein gegebenes Alphabet $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ kann jedes Symbol α_i als die ganze Zahl i codiert werden.

- Ein Wort $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}$ kann damit als die Folge $i_1, \dots, i_n, 0$ auf das Eingabeband einer R geschrieben werden.

- Das Wort wird von R akzeptiert, wenn R die Folge vom Eingabeband liest, eine 1 in das Ausgabeband schreibt und terminiert.

- Die Sprache von R ist die Menge der von R akzeptierten Wörter.

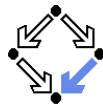
Beispiel



RAM-Programm für die Funktion $f(n) = \begin{cases} n^n, & \text{wenn } n > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

read r_1	READ	1	Eingabe von $c(1)$	
if $r_1 \leq 0$ then	LOAD	1	$c(0) \leftarrow c(1)$	
write 0	JGTZ	else	wenn $c(0) > 0$, else	
else	WRITE	=0	Ausgabe von 0	
$r_2 \leftarrow r_1$	JUMP	halt		
$r_3 \leftarrow r_1 - 1$	else:	LOAD	1	$c(0) \leftarrow c(1)$
while $r_3 > 0$ do	STORE	2	$c(2) \leftarrow c(0)$	
$r_2 \leftarrow r_2 \cdot r_1$	LOAD	1	$c(0) \leftarrow c(1)$	
$r_3 \leftarrow r_3 - 1$	SUB	=1	$c(0) \leftarrow c(0) - 1$	
write r_2	STORE	3	$c(3) \leftarrow c(0)$	
	...			

Beispiel

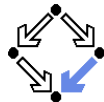


```
read r1
if r1 ≤ 0 then
  write 0
else
  r2 ← r1
  r3 ← r1 - 1
  while r3 > 0 do
    r2 ← r2 · r1
    r3 ← r3 - 1
  write r2

while:  LOAD 3      c(0) ← c(3)
        JGTZ body  wenn c(0) > 0, body
        JUMP done
body:   LOAD 2      c(0) ← c(2)
        MULT 1      c(0) ← c(0) · c(1)
        STORE 2     c(2) ← c(0)
        LOAD 3      c(0) ← c(3)
        SUB   =1    c(0) ← c(0) - 1
        STORE 3     c(3) ← c(0)
        JUMP  while
done:   WRITE 2     Ausgabe von c(2)
halt:   HALT
```

Ähnlich einem echten Maschinenprogramm.

Beispiel



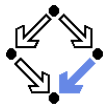
RAM-Programm, das alle Wörter aus 1en und 2en akzeptiert, die aus gleich vielen 1en wie 2en bestehen.

```
 $r_2 \leftarrow 0$   
read  $r_1$   
while  $r_1 \neq 0$  do  
  if  $r_1 \neq 1$   
    then  $r_2 \leftarrow r_2 - 1$   
    else  $r_2 \leftarrow r_2 + 1$   
  read  $r_1$   
if  $r_2 = 0$  then write 1
```

```
LOAD    =0     $c(0) = 0$   
STORE   2     $c(2) = c(0)$   
READ    1    Eingabe von  $r_1$   
while:  LOAD   1     $c(0) \leftarrow c(1)$   
        JZERO  done  wenn  $c(0) = 0$ , done  
        LOAD   1     $c(0) \leftarrow c(1)$   
        SUB    =1     $c(0) \leftarrow c(0) - 1$   
        JZERO  one   wenn  $c(0) = 0$ , one  
        LOAD   2     $c(0) \leftarrow c(2)$   
        SUB    =1     $c(0) \leftarrow c(0) - 1$   
        STORE  2     $c(2) = c(0)$   
        JUMP   read  
one:    LOAD   2     $c(0) \leftarrow c(2)$   
        ADD    =1     $c(0) \leftarrow c(0) + 1$   
        STORE  2     $c(2) = c(0)$ 
```

...

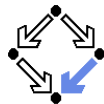
Beispiel



```
 $r_2 \leftarrow 0$   
read  $r_1$   
while  $r_1 \neq 0$  do  
  if  $r_1 \neq 1$   
    then  $r_2 \leftarrow r_2 - 1$   
    else  $r_2 \leftarrow r_2 + 1$   
  read  $r_1$   
if  $r_2 = 0$  then write 1
```

```
...  
read:  READ    1      Eingabe von c(1)  
      JUMP    while  
done:  LOAD    2       $c(0) \leftarrow c(2)$   
      JZERO   write  wenn  $c(0) = 0$ , write  
      HALT  
write: WRITE   =1     Ausgabe von 1  
      HALT
```

Random Access Stored Program Machine



Programm selbst ist im Speicher in Registern abgelegt.

■ Random Access Stored Program Machine (RASP)

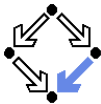
- Instruktionen wie RAM.
 - Ausnahme: keine indirekte Adressierung (werden durch Modifikation der Instruktionen während der Programmausführung ersetzt).
- Jede Instruktion ist in zwei aufeinanderfolgenden Registern codiert:
 - Register i : der Operationscode als ganze Zahl.
 - Register $i + 1$: der Operand.
LOAD 3: (1,3), LOAD =3 (2,3), ...
- Die Programmausführung ähnlich ist wie bei der RAM.
 - Das Programm ist in einer Folge von Registern abgelegt.
 - Der Befehlszähler verweist auf das Register, das den Operationscode der ersten Instruktion enthält.
 - Nach Ausführung jeder Instruktion wird Befehlszähler um 2 erhöht.
Ausnahme: Instruktionen JUMP, JGTZ, JZERO, HALT.

Vergleich von RAM und RASP



- Ist das Konzept der RAM mächtiger?
 - Ist indirekte Adressierung mächtiger als Selbstmodifikation?
- Ist das Konzept der RASP mächtiger?
 - Bieten selbstmodifizierende Programme zusätzliche Möglichkeiten?
- **Satz:** zu jedem RAM-Programm gibt es ein äquivalentes RASP-Programm und umgekehrt.
 - Beide Konzepte sind **gleich** mächtig.

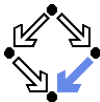
RAM-Programme haben die gleiche Mächtigkeit wie RASP-Programme, sind aber in gewissem Sinne "sicherer".



Simulation von RAM durch RASP

Wir konstruieren ein zu einem gegebenen RAM-Programm P äquivalentes RASP-Programm P' .

- P' benötigt r zusätzliche Register:
 - Register 1 für Zwischenspeicherung des Akkumulators von P .
 - Register 2, \dots , r für das Programm selbst.
 - Register $r + 1, r + 2, \dots$ simulieren die Register 1, 2, \dots von P .
- Übersetzung einer Instruktion von P ohne indirekte Adressierung:
 - Identische Instruktion in P' (mit Registerzugriffen um r Positionen verschoben).
- Übersetzung einer Instruktion von P mit indirekter Adressierung:
 - Folge von sechs RASP-Instruktionen.
 - Indirekte Adressierung wird durch Instruktionsmodifikation simuliert.
- P mit n Instruktionen, davon m mit indirekter Adressierung.
 - P' hat $(n - m) + 6m = n + 5m$ Instruktionen.
 - Verschiebungsfaktor $r = 2(n + 5m) + 1 = 2n + 10m + 1$.

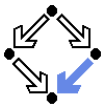


Simulation von RAM durch RASP

Übersetzung der RAM-Instruktion SUB *i ($i \geq 1$).

Adresse	Opcode	Operand	Beschreibung
	STORE	1	$c(1) \leftarrow c(0)$
	LOAD	$r+i$	$c(0) \leftarrow c(r+i)$
	ADD	r	$c(0) \leftarrow c(0) + r$
	STORE	$a+1$	$c(a+1) \leftarrow c(0)$
	LOAD	1	$c(0) \leftarrow c(1)$
$a:$	SUB	...	$c(0) \leftarrow c(0) - \dots$

- Inhalt des Akkumulators wird gesichert.
- Im Akkumulator wird $c(r+i) + r$ berechnet.
- Ergebnis wird in den Operandenteil der SUB-Instruktion geschrieben.
- Der Inhalt des Akkumulator wird wieder hergestellt.
- Die modifizierte SUB-Instruktion wird ausgeführt.

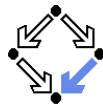


Simulation von RASP durch RAM

Wir konstruieren ein zu einem gegebenen RASP-Programm P äquivalentes RAM-Programm P' .

- Das RAM-Programm ist ein **Interpreter** für die Sprache der RASP.
 - Liest jede Instruktion des RASP-Programms.
 - Bestimmt den numerischen Operationscode.
 - Verzweigt in eine Instruktionsfolge, die eine RASP-Instruktion mit diesem Operationscode interpretiert.
- Register von P' :
 - r_1 ... für indirekte Adressierung (am Anfang 0).
 - r_2 ... der Befehlszähler der RASP (am Anfang 4).
 - r_3 ... der Akkumulator der RASP (am Anfang 0).
 - (r_4, r_5, \dots) ... das RASP-Programm.

Simulation von RASP durch RAM

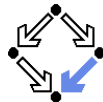


Interpretation der RASP Instruktion SUB i .

LOAD	2	$c(2) \leftarrow c(2) + 1$
ADD	=1	Befehlszähler verweist auf Operand i
STORE	2	
LOAD	*2	$c(1) \leftarrow c(c(2)) + 3$
ADD	=3	Inhalt des RASP-Registers i
STORE	1	
LOAD	3	$c(3) \leftarrow c(3) - c(c(1))$
SUB	*1	RASP-Akkumulator um Inhalt des RASP-Registers i vermindert
STORE	3	
LOAD	2	$c(2) \leftarrow c(2) + 1$
ADD	=1	Befehlszähler verweist auf nächste Instruktion
STORE	2	
JUMP	loop	Interpretiere die nächste Instruktion

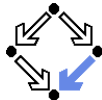
Modell eines *Mikroprogramms*, wie es viele Prozessoren exekutieren.

RAM und Endliche Automaten



- Jeder endliche Automat kann durch eine RAM simuliert werden.
 - Es ist nicht schwer, für jeden gegebenen Automaten eine äquivalente RAM zu konstruieren.
 - Das Konzept der RAM ist also mindestens so mächtig wie das der endlichen Automaten.
 - Aber ist es auch mächtiger?
- Sei $L = \{a^m b^m \mid m \in \mathbb{N}\}$.
 - Wir haben gezeigt, dass L keine reguläre Sprache ist.
 - L wird also von keinem endlichen Automaten akzeptiert.
 - Es ist leicht, eine RAM zu konstruieren, die L akzeptiert:
 - Lies alle a (bis zum ersten Symbol, das kein a ist).
Bestimme dabei ihre Anzahl n .
 - Lies alle b (bis zum ersten Symbol, das kein b ist).
Bestimme dabei ihre Anzahl m .
 - Gib 1 aus, wenn $n = m$ und die Folge zu Ende ist.

Das Konzept der RAM ist mächtiger als das der endlichen Automaten.



Was macht die Überlegenheit der RAM aus?

- Die Möglichkeit zu **unendlich vielen Zuständen**.
 - Register können beliebig große ganze Zahlen speichern.
 - Unendlich viele Register.
- **Genau genommen** ist ein Computer nur ein endlicher Automat!
 - Fixe Anzahl von Speicherzellen, die nur ganze Zahlen bis zu einem maximalen Absolutbetrag speichern können.
 - Endliche Anzahl von Zuständen.
- **Annähernd** kann Computer aber auch als RAM betrachtet werden.
 - Folgen von Speicherwörtern können beliebig große Zahlen codieren.
 - Solange der verfügbare Speicher ausreicht.
 - Virtueller Speicher kann beliebig großen Speicher simulieren.
 - Solange der Sekundärspeicher (Plattenplatz) ausreicht.

Unter der Annahme (prinzipiell) beliebig großen Speichers ist ein Computer einer RAM gleichmächtig.