Berechenbarkeit und Komplexität
Algorithmen

Wolfgang Schreiner
Wolfgang.Schreiner@risc.jku.at

Research Institute for Symbolic Computation (RISC)
Johannes Kepler University, Linz, Austria
http://www.risc.jku.at

Was ist ein Algorithmus?

al-Khwarizmi (um 825): *Über das Rechnen mit indischen Ziffern*.

- Algorithmus: eine genau definierte Handlungsvorschrift zur Lösung eines bestimmten Problems.
  - Nimmt ein Eingabe.
  - Führt eine endliche Anzahl von Schritten aus.
  - Liefert eine Ausgabe.
- Charakteristische Eigenschaften eines Algorithmus:
  - Ist durch eine endliche Menge von Anweisungen beschrieben.
  - Jede Anweisung ist durch einen "Rechner" effektiv ausführbar.
  - Die nächste auszuführende Anweisung ist klar definiert.
  - Der Algorithmus liefert für jede Eingabe ein Ergebnis.
  - Gleiche Eingaben führen zu gleichem Ergebnis.
  - ...

Leider nur ein informelles Konzept auf rein intuitiver Basis.

Der Euklidische Algorithmus

Euklid (um 300 v.Chr.): *Die Elemente*.

- Klassische Formulierung (geometrisch)
  - Problem: Suche nach dem gemeinsamen “Maß” der Längen zweier Linien AB und CD.

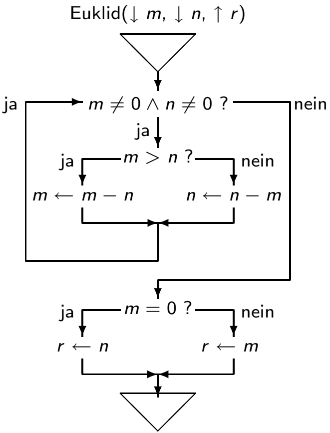
    > *…Wenn CD aber AB nicht mißt, und man nimmt bei AB, CD abwechselnd immer das kleinere vom größeren weg, dann muss (schließlich) eine Zahl übrig bleiben, die die vorangehende misst.*

- Moderne Formulierung (arithmetisch)
  - Problem: Suche nach dem größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher Zahlen m und n, die nicht beide Null sind.
    1. Wenn $m = 0$, dann ist das Ergebnis n.
    2. Wenn $n = 0$, dann ist das Ergebnis m.
    3. Wenn $m > n$, setze m auf $m - n$ und fahre mit Schritt 1 fort.
    4. Ansonsten setze n auf $n - m$ und fahre mit Schritt 1 fort.

Siehe Skriptum für eine optimierte Variante.

Der Euklidische Algorithmus

Darstellung durch Abblaufdiagramm bzw. strukturiertes Programm.



Euklid($\downarrow m$, $\downarrow n$, $\uparrow r$):
  while $m \neq 0 \wedge n \neq 0$ **do**
    if $m > n$
      then $m \leftarrow m - n$
      else $n \leftarrow n - m$
  if $m = 0$
    then $r \leftarrow n$
    else $r \leftarrow m$
end Euklid.

Algorithmus und Funktion

- Algorithmus: eine eindeutige Rechenvorschrift.
  - Zum Beispiel der *Euklidische Algorithmus*.
    - Eingabe: zwei natürliche Zahlen m und n.
    - Ausgabe: eine natürliche Zahl r.
    - Vorschrift: ...
  - Dieser Algorithmus berechnet eine *mathematische Funktion*.
- Funktion: eine eindeutige Abbildung von Eingaben auf Ausgaben.
  - Zum Beispiel der *größte gemeinsame Teiler*.

$$\mathrm{ggt} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$\mathrm{ggt}(m, n) = r$$

wobei r die größte natürliche Zahl ist, die m und n teilt.

  - Der größte gemeinsame Teiler wird z.B. durch den Euklidischen Algorithmus berechnet.

Verschiedene Algorithmen können die *gleiche* Funktion berechnen; nicht jede Funktion ist notwendigerweise durch einen Algorithmus berechenbar.

Das Problem des Algorithmus-Begriffs

Für manche Fragestellungen ist der Begriff "Algorithmus" zu schwammig.

- Gibt es *irgendeinen* Algorithmus zur Lösung eines bestimmten Problems (bzw. zur Berechnung einer bestimmten Funktion)?
    - Problem: entscheide, ob eine beliebige Aussage über den natürlichen Zahlen gültig ist.
        - *Entscheidungsproblem:* unlösbar! (Church/Turing, 1936/1937)
    - Problem: entscheide, ob ein beliebiges Programm terminiert.
        - *Halteproblem:* unlösbar! (Turing, 1936)
    - Problem: entscheide, on zwei beliebige Programme das gleiche Ein/Ausgabe-Verhalten haben.
        - *Äquivalenzproblem:* unlösbar! (Rice, 1951)

In den 1930ern wurden verschiedene formale Modelle wurden entwickelt, um für solche Frgen den Begriff "Algorithmus" genauer zu fassen.

Die weitere Landkarte

- Endliche Automaten
  - Erkennen *reguläre Sprachen*.
- Random Access Machines (RAMs)
  - Mächtiger als endliche Automaten.
  - Gleichmächtig der Random Access Stored Program Machine (RASP).
    - Beschreibt in formaler Form den Aufbau eines Computers.
- Turing-Maschinen
  - Gleiche Mächtigkeit wie RAMs, aber einfacher.
  - Erkennen *rekursiv aufzählbare Sprachen*.
- Die Chomsky-Hierarchie
  - Eine Kategorisierung von Sprachen und Maschinenmodellen.
- μ-rekursive Funktionen
  - Gleiche Mächtigkeit wie Turing-Maschinen, aber rein mathematisch.
    - Gleiche Mächtigkeit wie Programme mit while-Schleifen.
  - Hat als Unterklasse die primitiv rekursiven Funktionen.
    - Gleiche Mächtigkeit wie Programme mit Zählschleifen.

Church'sche These: ein Algorithmus ist, was als eine Turing-Maschine (oder RAM/RASP oder μ-rekursive Funktion) beschreibbar ist.