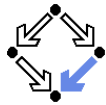


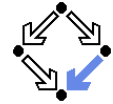
Berechenbarkeit und Komplexität Algorithmen

Wolfgang Schreiner
Wolfgang.Schreiner@risc.jku.at

Research Institute for Symbolic Computation (RISC)
Johannes Kepler University, Linz, Austria
<http://www.risc.jku.at>



Was ist ein Algorithmus?

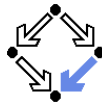


al-Khwarizmi (um 825): *Über das Rechnen mit indischen Ziffern.*

- **Algorithmus:** eine genau definierte Handlungsvorschrift zur Lösung eines bestimmten Problems.
 - Nimmt eine Eingabe.
 - Führt eine endliche Anzahl von Schritten aus.
 - Liefert eine Ausgabe.
- Charakteristische Eigenschaften eines Algorithmus:
 - Ist durch eine endliche Menge von Anweisungen beschrieben.
 - Jede Anweisung ist durch einen "Rechner" effektiv ausführbar.
 - Die nächste auszuführende Anweisung ist klar definiert.
 - Der Algorithmus liefert für jede Eingabe ein Ergebnis.
 - Gleiche Eingaben führen zu gleichem Ergebnis.
 - ...

Leider nur ein informelles Konzept auf rein intuitiver Basis.

Der Euklidische Algorithmus

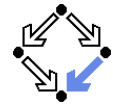


Euklid (um 300 v.Chr.): *Die Elemente.*

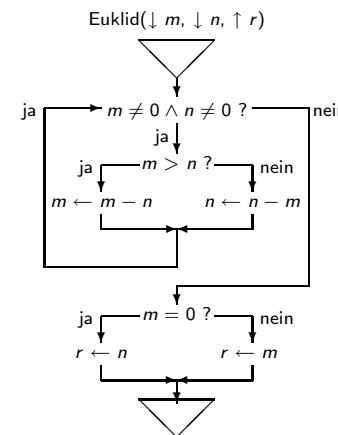
- Klassische Formulierung (geometrisch)
 - Problem: Suche nach dem gemeinsamen "Maß" der Längen zweier Linien AB und CD.
 - ... Wenn CD aber AB nicht mißt, und man nimmt bei AB, CD abwechselnd immer das kleinere vom größeren weg, dann muss (schließlich) eine Zahl übrig bleiben, die die vorangehende misst.
- Moderne Formulierung (arithmetisch)
 - Problem: Suche nach dem größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher Zahlen m und n , die nicht beide Null sind.
 1. Wenn $m = 0$, dann ist das Ergebnis n .
 2. Wenn $n = 0$, dann ist das Ergebnis m .
 3. Wenn $m > n$, setze m auf $m - n$ und fahre mit Schritt 1 fort.
 4. Ansonsten setze n auf $n - m$ und fahre mit Schritt 1 fort.

Siehe Skriptum für eine optimierte Variante.

Der Euklidische Algorithmus



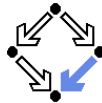
Darstellung durch Ablaufdiagramm bzw. strukturiertes Programm.



```

Euklid(↓ m, ↓ n, ↑ r):
while m ≠ 0 ∧ n ≠ 0 do
  if m > n
    then m ← m - n
    else n ← n - m
if m = 0
  then r ← n
  else r ← m
end Euklid.
    
```

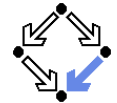
Algorithmus und Funktion



- **Algorithmus:** eine eindeutige Rechenvorschrift.
 - Zum Beispiel der *Euklidische Algorithmus*.
 - Eingabe: zwei natürliche Zahlen m und n .
 - Ausgabe: eine natürliche Zahl r .
 - Vorschrift: ...
 - Dieser Algorithmus berechnet eine *mathematische Funktion*.
- **Funktion:** eine eindeutige Abbildung von Eingaben auf Ausgaben.
 - Zum Beispiel der *größte gemeinsame Teiler*.
$$\text{ggT} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$
$$\text{ggT}(m, n) = r$$
wobei r die größte natürliche Zahl ist, die m und n teilt.
 - Der größte gemeinsame Teiler wird z.B. durch den Euklidischen Algorithmus berechnet.

Verschiedene Algorithmen können die gleiche Funktion berechnen; nicht jede Funktion ist notwendigerweise durch einen Algorithmus berechenbar.

Das Problem des Algorithmus-Begriffs

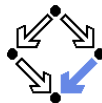


Für manche Fragestellungen ist der Begriff "Algorithmus" zu schwammig.

- Gibt es *irgendeinen* Algorithmus zur Lösung eines bestimmten Problems (bzw. zur Berechnung einer bestimmten Funktion)?
 - Problem: entscheide, ob eine beliebige Aussage über den natürlichen Zahlen gültig ist.
 - *Entscheidungsproblem*: unlösbar! (Church/Turing, 1936/1937)
 - Problem: entscheide, ob ein beliebiges Programm terminiert.
 - *Halteproblem*: unlösbar! (Turing, 1936)
 - Problem: entscheide, ob zwei beliebige Programme das gleiche Ein/Ausgabe-Verhalten haben.
 - *Äquivalenzproblem*: unlösbar! (Rice, 1951)

In den 1930ern wurden verschiedene formale Modelle entwickelt, um für solche Fragen den Begriff "Algorithmus" genauer zu fassen.

Die weitere Landkarte



- **Endliche Automaten**
 - Erkennen *reguläre Sprachen*.
- **Random Access Machines (RAMs)**
 - Mächtiger als endliche Automaten.
 - Gleichmächtig der *Random Access Stored Program Machine (RASP)*.
 - Beschreibt in formaler Form den Aufbau eines Computers.
- **Turing-Maschinen**
 - Gleiche Mächtigkeit wie RAMs, aber einfacher.
 - Erkennen *rekursiv aufzählbare Sprachen*.
- **Die Chomsky-Hierarchie**
 - Eine Kategorisierung von Sprachen und Maschinenmodellen.
- **μ -rekursive Funktionen**
 - Gleiche Mächtigkeit wie Turing-Maschinen, aber rein mathematisch.
 - Gleiche Mächtigkeit wie Programme mit while-Schleifen.
 - Hat als Unterklasse die *primitiv rekursiven Funktionen*.
 - Gleiche Mächtigkeit wie Programme mit Zählschleifen.

Church'sche These: ein Algorithmus ist, was als eine Turing-Maschine (oder RAM/RASP oder μ -rekursive Funktion) beschreibbar ist.