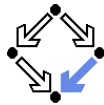


# Berechenbarkeit und Komplexität

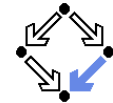
## Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit

Wolfgang Schreiner  
Wolfgang.Schreiner@risc.uni-linz.ac.at

Research Institute for Symbolic Computation (RISC)  
Johannes Kepler University, Linz, Austria  
<http://www.risc.uni-linz.ac.at>



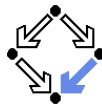
## Entscheidungsprobleme



- **(Entscheidungs)problem**  $P$ :
  - (Entscheidungs)frage  $P$  mit formalen Parameters  $n_1, \dots, n_k$ .  
*Ist die natürliche Zahl  $n$  eine Quadratzahl?*
- Eine **Instanz**  $P(a_1, \dots, a_k)$  des Problems:
  - Frage  $P$  mit konkreten Argumenten  $a_1, \dots, a_k$ .  
*Ist die natürliche Zahl 15 eine Quadratzahl?*
- Die **Sprache**  $L_P$  des Problems:
  - $L_P := \{(a_1, \dots, a_k) \mid \text{Die Antwort auf } P(a_1, \dots, a_k) \text{ ist "ja"}\}$   
*Die Menge aller Quadratzahlen.*

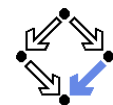
Wir beschäftigen uns im Folgenden mit Entscheidungsproblemen.

## Die Entscheidbarkeit von Problemen



- Problem  $P$  heißt **entscheidbar**, wenn  $L_P$  rekursiv ist.
  - Es existiert eine Turing-Maschine (Algorithmus)  $M$ , die für jede Instanz  $P(a_1, \dots, a_k)$  terminiert und "ja" oder "nein" antwortet:
    - Sowohl  $L_P$  als auch  $\overline{L_P}$  sind rekursiv aufzählbar.
    - $M$  kann also alle Argumente  $(a_1, \dots, a_k)$  aufzählen, für die die Antwort auf  $P(a_1, \dots, a_k)$  "ja" ist und (gleichzeitig) auch alle Argumente, für die die Antwort "nein" ist.
    - Für die gegebenen Argumente  $(a_1, \dots, a_k)$  wartet  $M$ , bis diese in einer der beiden Aufzählungen auftauchen und gibt dementsprechend die Antwort "ja" oder "nein".
- Problem  $P$  heißt **semi-entscheidbar**, wenn  $L_P$  rekursiv aufzählbar ist.
  - Es existiert eine Turing-Maschine (*Semi-Algorithmus*), die für jede Instanz  $P(a_1, \dots, a_k)$  entweder "ja" oder aber gar nicht antwortet:
    - $M$  kann alle Argumente  $(a_1, \dots, a_k)$  aufzählen, für die die Antwort auf  $P(a_1, \dots, a_k)$  "ja" ist.
    - Für die gegebenen Argumente  $(a_1, \dots, a_k)$  wartet  $M$ , bis diese in der Aufzählung auftauchen und antwortet dann "ja"; tauchen sie aber nie auf, wartet  $M$  unendlich lange und antwortet daher nie.

## Die Codierung einer Turing-Maschine

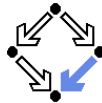


Turing-Maschine  $M = (\{q_1, \dots, q_n\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \sqcup\}, q_1, \{q_2\}, \delta)$ .

- Die **Codierung**  $\langle M \rangle$  von  $M$ :
  - Eine Folge von 0en und 1en der Form:  
 $111 \text{ code}_1 11 \text{ code}_2 11 \dots 11 \text{ code}_r 111$ 
    - $\text{code}_1, \dots, \text{code}_r$  sind die Codierungen der  $r$  Operationen von  $M$ .
  - Jede Operation ist bestimmt durch eine Abbildung  
 $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$ 
    - $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = \sqcup, D_1 = L, D_2 = R$   
"Richtung"  $S$  kann durch Folge  $RL$  ersetzt werden.
    - $\text{code} = 0^i 10^j 10^k 10^l 10^m$   
Codierung des Tupels  $(i, j, k, l, m)$

Eine Turing-Maschine lässt sich als Bit-Folge codieren; es gibt also abzählbar viele Turing-Maschinen.

## Die Auflistung aller Turing-Maschinen

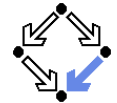


- Wir können alle Turing-Maschinen als  $M_1, M_2, M_3, \dots$  reihen.
  - Sortierung der Codierungen nach Länge und dann bit-alphabetisch.
- Wir können alle möglichen Eingabewörter  $w_1, w_2, w_3, \dots$  reihen.
  - Sortierung der Wörter nach Länge und dann bit-alphabetisch.
- Wir können die folgende unendliche Matrix konstruieren:

	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$\dots$
$w_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$\dots$
$w_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$\dots$
$w_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$$a_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{wenn } w_i \in L(M_j) \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

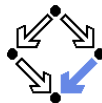
## Die Diagonalsprache einer Turing-Maschine



- Die **Diagonalsprache**  $L_d := \{w_j \mid a_{jj} = 1\}$ :
  - $w_j \in L_d \Leftrightarrow a_{jj} = 1 \Leftrightarrow w_j \notin L(M_j)$
  - $w_j$  ist ein Wort der Diagonalsprache, wenn es *nicht* von der Turing-Maschine  $M_j$  akzeptiert wird.
- Satz:** Die Diagonalsprache ist nicht rekursiv aufzählbar.
  - Angenommen,  $L_d$  wäre rekursiv aufzählbar, dann gäbe es eine Turing-Maschine  $M_j$  mit  $L_d = L(M_j)$ . Es gilt nun  $w_j \in L_d \Leftrightarrow a_{j,j} = 1 \Leftrightarrow w_j \notin L(M_j)$  und daher  $L_d \neq L(M_j)$ .

Die Diagonalsprache ist daher auch nicht rekursiv.

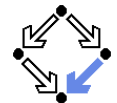
## Das Akzeptierungsproblem



- Das **Akzeptierungsproblem** für Turingmaschinen:  
*Akzeptiert die Turing-Maschine mit Codierung  $M$  das Wort  $w$ ?*
  - Die **universelle Sprache**  $L_u$  ist die Sprache des Akzeptierungsproblems:  
 $L_u = \{(\langle M \rangle, w) \mid w \in L(M)\}$ 
    - Turing-Maschine  $M$  akzeptiert  $w \Leftrightarrow (\langle M \rangle, w) \in L_u$
  - Eine **universelle Turing-Maschine** akzeptiert  $L_u$ .
    - Existiert, da  $L_u$  rekursiv aufzählbar ist (Beweis siehe Skriptum).
    - Ist ein **Interpreter** für Turing-Maschinen.
- Satz:** das Akzeptierungsproblem ist unentscheidbar (d.h.  $L_u$  ist nicht rekursiv).
  - Angenommen, es gäbe  $M_u$ , die  $L_u$  akzeptiert und für jede Berechnung terminiert. Dann könnten wir  $M'$  mit  $L(M') = L_d$  konstruieren:
  - $M'$  bestimmt für die Eingabe  $w$  den Index  $i$  sodass  $w = w_i$ .
  - $M'$  bestimmt  $\langle M_i \rangle$  und übergibt die Eingabe  $(\langle M_i \rangle, w_i)$  an  $M_u$ .
    - $M_u$  akzeptiert die Eingabe:  $M'$  akzeptiert  $w$  nicht.
    - $M_u$  akzeptiert die Eingabe nicht:  $M'$  akzeptiert  $w$ .

Eine universelle Turing-Maschine terminiert nicht für alle Eingaben.

## Das Halteproblem

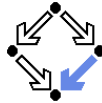


Ein scheinbar etwas einfacheres Problem.

- Das **Halteproblem** für Turing-Maschinen: +  
*Endet die Berechnung der Turing-Maschine  $M$  für Eingabe  $w$ ?*
- Die Sprache dieses Problems:  
 $L_h = \{(\langle M \rangle, w) \mid M \text{ hält bei Eingabe } w \text{ an}\}$
- Satz:** das Halteproblem ist unentscheidbar (d.h.  $L_h$  ist nicht rekursiv).
  - Angenommen, es gäbe  $M_h$ , die  $L_h$  akzeptiert und für jede Berechnung terminiert. Dann könnten wir  $M'$  mit  $L(M') = L_u$  konstruieren:
  - $M'$  leitet seine Eingabe  $(\langle M \rangle, w)$  an  $M_h$  weiter.
    - $M_h$  akzeptiert die Eingabe nicht:  $M'$  akzeptiert die Eingabe nicht.
    - $M_h$  akzeptiert die Eingabe:  $M'$  übergibt  $w$  an  $M$  und wartet auf das Ende der Berechnung.  $M'$  akzeptiert  $(\langle M \rangle, w)$  genau dann wenn  $M$  das Wort  $w$  akzeptiert.
  - $M'$  terminiert immer; wir wissen aber, dass  $L_u$  nicht rekursiv ist!

Es kann auch kein Algorithmus zur Lösung des Halteproblems existieren.

## Das Halteproblem



Volkstümliche Version (nach Wikipedia).

Angenommen, es gibt eine Funktion *haltetest*:

```
haltetest(Programm, Eingabe)
  wenn Programm(Eingabe) terminiert
    dann return Ja
  sonst return Nein
```

Dann lässt sich diese im folgenden Programm verwenden:

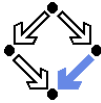
```
test(Programm)
  wenn haltetest(Programm, Programm) = Ja dann
    laufe in einer leeren Endlosschleife
```

Wenn man nun der Prozedur *test* sich selbst als Eingabe übergibt, kann diese kein richtiges Ergebnis liefern:

```
test(test);
```

Dieser Aufruf terminiert genau dann, wenn er nicht terminiert.

## Der Satz von Rice

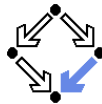


Welche Eigenschaften von Turing-Maschinen (d.h. rekursiv aufzählbarer Sprachen) sind überhaupt entscheidbar?

- Eine **Eigenschaft** rekursiv aufzählbarer Sprachen ist eine Menge solcher Sprachen.
- Eine Eigenschaft  $\mathcal{S}$  heißt **trivial** wenn  $\mathcal{S}$  leer ist oder alle rekursiv aufzählbaren Sprachen enthält.
- Eine Eigenschaft  $\mathcal{S}$  heißt **entscheidbar**, wenn die Sprache  $L_{\mathcal{S}} := \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \mathcal{S}\}$  rekursiv ist (d.h. wenn für jede Turing-Maschine  $M$  entschieden werden kann, ob die von ihr akzeptierte Sprache in  $\mathcal{S}$  enthalten ist).
- **Satz von Rice (1953)**: Keine nicht-triviale Eigenschaft rekursiv aufzählbarer Sprachen ist entscheidbar.

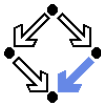
Alle "interessanten" Eigenschaften von Turing-Maschinen (d.h. der von ihnen akzeptierten Sprachen) sind unentscheidbar.

## Der Satz von Rice



- **Beweis**: Sei  $\mathcal{S}$  eine nicht-triviale Eigenschaft r.a. Sprachen.  
Annahme:  $\emptyset \notin \mathcal{S}$  (andernfalls betrachten wir  $\bar{\mathcal{S}}$ ).
- Angenommen  $\mathcal{S}$  wäre durch eine Turing-Maschine  $M_{\mathcal{S}}$  entscheidbar.
- Dann können wir eine Turing-Maschine  $A$  konstruieren, die aus der Eingabe  $(\langle M \rangle, w)$  die Ausgabe  $\langle M' \rangle$  produziert, sodass  $L(M') \in \mathcal{S} \Leftrightarrow w \in L(M)$ 
  - Da  $\mathcal{S}$  nicht-trivial und entscheidbar ist, können wir eine Turing-Maschine  $M_L$  mit  $L := L(M_L) \in \mathcal{S}$  finden.
  - $M'$  simuliert  $M$  auf  $w$ . Akzeptiert  $M$  die Eingabe  $w$  nicht, akzeptiert auch  $M'$  seine Eingabe  $x$  nicht. Ansonsten simuliert  $M'$  das Verhalten von  $M_L$  auf  $x$  und akzeptiert  $x$  genau dann, wenn  $M_L$  es akzeptiert.
  - Also  $L(M') = \begin{cases} \emptyset, & \text{wenn } w \notin L(M) \\ L, & \text{wenn } w \in L(M) \end{cases}$
- Wir konstruieren eine Turing-Maschine  $M_u$  zur Entscheidung von  $L_u$ :
  - Wende  $A$  auf die Eingabe  $(\langle M \rangle, w)$  an und erzeuge  $\langle M' \rangle$ .
  - $M_u$  akzeptiert  $(\langle M \rangle, w)$  gdw.  $M_{\mathcal{S}}$  die Eingabe  $\langle M' \rangle$  akzeptiert.
  - Wir wissen aber bereits, dass  $L_u$  nicht rekursiv ist.

## Weitere unentscheidbare Probleme

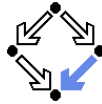


Anwendungen des Satzes von Rice.

- Das **eingeschränkte Akzeptierungsproblem** ist unentscheidbar.  
*Akzeptiert die Turing-Maschine mit Codierung  $M$  die Eingabe  $\epsilon$ ?*
  - $L_{u,\epsilon} := \{\langle M \rangle \mid \epsilon \in L(M)\}$  ist nicht rekursiv.
  - $L_{u,\epsilon} = L_{S_A}$ , für eine nicht-triviale Eigenschaft  $S_A$ .
- Das **eingeschränkte Halteproblem** ist unentscheidbar.  
*Endet die Berechnung der Turing-Maschine  $M$  für die Eingabe  $\epsilon$ ?*
  - $L_{h,\epsilon} := \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält bei Eingabe } \epsilon \text{ an}\}$  ist nicht rekursiv.
  - Wäre  $L_{h,\epsilon}$  rekursiv, wäre auch  $L_{u,\epsilon}$  rekursiv.
    - Beweis analog zu Beweis für allgemeines Halteproblem.
- Das Problem  $L(M_1) = L(M_2)$ ? ist unentscheidbar.
- Das Problem  $L(M_1) \subseteq L(M_2)$ ? ist unentscheidbar.
- Das Problem  $L(M) = L'$ ? ist unentscheidbar.

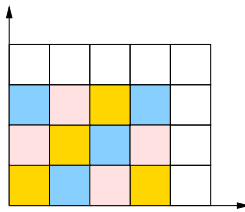
Es können keine Algorithmen (höchstens Semi-Algorithmen) zur Lösung dieser Probleme existieren.

# Das Pflasterungsproblem

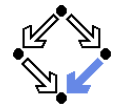


Auch manche mathematische Probleme können auf Probleme über Turing-Maschinen zurückgeführt werden.

- Das **Pflasterungsproblem**:
  - Eine endliche Menge von Typen von Pflastersteinen der Größe  $1 \times 1$ .
  - Ein "Anfangsstein" und eine Menge von "Nachbarschaftsregeln".
    - Welche Steintypen dürfen horizontal bzw. vertikal benachbart sein?
  - Gesucht ist eine Pflasterung des rechten oberen Quadranten der Ebene beginnend mit dem Anfangsstein an der linken unteren Ecke, sodass die Nachbarschaftsregeln berücksichtigt werden.

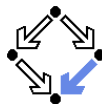


# Das Pflasterungsproblem



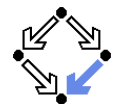
- Ein **Pflasterungssystem**  $\mathcal{D} = (D, d_0, H, V)$ :
  - $D \dots$  eine endliche Menge von **Pflastersteintypen**.
  - $d_0 \in D \dots$  der Typ des **Anfangssteins**.
  - $H, V \subseteq D \times D \dots$  die Mengen der horizontal bzw. vertikal erlaubten Paare von **benachbarten Typen**.
- $f$  ist eine **Pflasterung** zum Pflasterungssystem  $\mathcal{D}$ :
  - $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow D$
  - $f(0, 0) = d_0$
  - $\forall n, m \in \mathbb{N} : (f(n, m), f(n + 1, m)) \in H$
  - $\forall n, m \in \mathbb{N} : (f(n, m), f(n, m + 1)) \in V$
- Das **Pflasterungsproblem**:
  - Gibt es eine Pflasterung zum Pflasterungssystem  $\mathcal{D}$ ?
- Satz**: Das Pflasterungsproblem ist unentscheidbar.

# Das Pflasterungsproblem

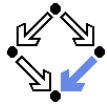


- Beweis**: wir führen das eingeschränkte Halteproblem von Turingmaschinen auf das Pflasterungsproblem zurück.
    - Wir konstruieren zur Turing-Maschine  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$  ein Pflasterungssystem  $\mathcal{D}_M = (D, d_0, H, V)$ , sodass es genau dann eine Pflasterung zu  $\mathcal{D}_M$  gibt, wenn  $M$  bei Eingabe  $\epsilon$  nicht anhält.
      - Wäre das Pflasterungsproblem entscheidbar, dann wäre auch das eingeschränkte Halteproblem entscheidbar.
    - Wir nehmen dabei eine Übergangsfunktion der folgenden Form an:
      - $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times (\Gamma \cup \{L, R\})$ :
      - $\delta(q, \gamma) = (p, \eta)$ :  $M$  liest im Zustand  $q$  das Symbol  $\gamma$ , geht in Zustand  $p$  über und schreibt Symbol  $\eta$  (L/S-Kopf bleibt stationär).
      - $\delta(q, \gamma) = (p, L)$ :  $M$  liest im Zustand  $q$  das Symbol  $\gamma$ , geht in Zustand  $p$  über, und bewegt den L/S-Kopf nach links (ohne zu schreiben).
      - $\delta(q, \gamma) = (p, R)$ :  $M$  liest im Zustand  $q$  das Symbol  $\gamma$ , geht in Zustand  $p$  über, und bewegt den L/S-Kopf nach rechts (ohne zu schreiben).
- (keine Einschränkung der Mächtigkeit von Turing-Maschinen)

# Das Pflasterungsproblem



- Beweis**:  $D$  enthält die folgenden Pflastersteintypen:
  - Für  $\gamma \in \Gamma$  den Typ  $\begin{matrix} \gamma \\ \square \\ \gamma \end{matrix}$
  - Für  $\delta(q, \gamma) = (p, \eta)$  den Typ  $\begin{matrix} (p, \eta) \\ \square \\ (q, \gamma) \end{matrix}$
  - Für  $\delta(q, \gamma) = (p, R)$  und  $\eta \in \Gamma$  die Typen  $\begin{matrix} \gamma & p \\ \square & \eta \\ (q, \gamma) & \end{matrix}$  und  $\begin{matrix} (p, \eta) \\ p & \square \\ & \eta \end{matrix}$
  - Für  $\delta(q, \gamma) = (p, L)$  und  $\eta \in \Gamma$  die Typen  $\begin{matrix} (p, \eta) & p \\ \square & \eta \\ \eta & \end{matrix}$  und  $\begin{matrix} p & \square \\ \gamma & \square \\ (q, \gamma) & \end{matrix}$
  - Die Typen  $\begin{matrix} (q_0, \sqcup) \\ \square \\ \sqcup \end{matrix}$  (Anfangsstein) und  $\begin{matrix} \sqcup \\ \square \\ \sqcup \end{matrix}$
- Benachbarte Typen: müssen an Rändern zusammenpassen.
- Pflasterung zu  $\mathcal{D}_M$ : unendliche Berechnung von  $M$  bei Eingabe  $\epsilon$ .



## Beispiel

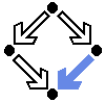
Turing-Maschine  $M_4 = (\{q_0, q_1\}, \emptyset, \{\sqcup\}, q_0, \emptyset, \delta)$ :

$$\delta(q_0, \sqcup) = (q_1, R), \delta(q_1, \sqcup) = (q_0, L).$$

Pflasterung zu  $\mathcal{D}_M$ :

$\sqcup$	$(q_1, \sqcup)$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
$q_1$	$q_1$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
$(q_0, \sqcup)$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
$q_0$	$q_0$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup$	$(q_1, \sqcup)$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
$q_1$	$q_1$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
$(q_0, \sqcup)$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
$(q_0, \sqcup)$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$

Turing-Maschine kommt nie über zweite Bandzelle hinaus.



## Das Korrespondenzproblem von Post

Das **Korrespondenzproblem von Post**:

Gegeben sind zwei Listen von Wörtern über einem Alphabet  $\Sigma$

$$w_1, \dots, w_k \text{ und } x_1, \dots, x_k.$$

Gibt es eine Folge von Zahlen  $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, k\}$ ,  $m \geq 1$ , sodass

$$w_{i_1} \dots w_{i_m} = x_1 \dots x_{i_m}?$$

Beispiel: sei  $\Sigma = \{0, 1\}$  und

$$w_1 = 1, w_2 = 10111, w_3 = 10 \text{ und } x_1 = 111, x_2 = 10, x_3 = 0$$

Es gilt

$$w_2 w_1 w_1 w_3 = 101111110 = x_2 x_1 x_1 x_3$$

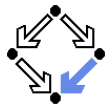
also ist  $i_1 = 2, i_2 = 1, i_3 = 1, i_4 = 3$  eine Lösung.

**Satz:** Das Korrespondenzproblem von Post ist unentscheidbar.

Sogar, wenn  $i_1 = 1$  festgelegt wird.

Beweis siehe Skriptum.

Als Konsequenz ist zum Beispiel auch unentscheidbar, ob eine kontextfreie Grammatik mehrdeutig ist.



## Das Emptiness-Problem

Das **Non-Emptiness-Problem**:

Akzeptiert die Turing-Maschine mit Codierung  $M$  ein Wort?

Die Sprache  $L_{ne}$  dieses Problems:

$$L_{ne} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset\}$$

**Satz:**  $L_{ne}$  ist rekursiv aufzählbar aber nicht rekursiv.

Beweis siehe Skriptum.

Das Problem ist nur semi-entscheidbar.

Das **Emptiness-Problem**:

Akzeptiert die Turing-Maschine mit Codierung  $M$  kein Wort?

Die Sprache  $L_e$  dieses Problems:

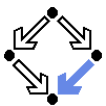
$$L_e = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$$

**Satz:**  $L_e$  ist nicht rekursiv aufzählbar.

Beweis siehe Skriptum.

Das Problem ist nicht einmal semi-entscheidbar.

Weitere unentscheidbare Probleme.



## Orakel-Turingmaschinen

Was wäre, wenn wir gewisse unentscheidbare Probleme (mit einem stärkeren Berechnungsmodell?) doch entscheiden könnten?

**Orakel-Turingmaschine**  $M^A$  mit **Orakel** für  $A$ :

Sprache  $A \subseteq \Sigma^*$ .

Turing-Maschine mit drei ausgezeichneten Zuständen  $q_?$ ,  $q_j$  und  $q_n$ .

Ist  $M^A$  in Zustand  $q_?$ , wird an das Orakel die Frage gestellt:

Ist das Wort rechts vom L/S-Kopf (bis zum ersten Leersymbol) in  $A$ ?

Ist Antwort "ja", geht  $M^A$  in den Zustand  $q_j$ .

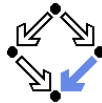
Ist Antwort "nein", geht  $M^A$  in den Zustand  $q_n$ .

Ist  $A$  nicht rekursiv, so kann  $M^A$  durch keine Turing-Maschine (ohne Orakel) simuliert werden.

$L(M^A)$  ist möglicherweise nicht rekursiv aufzählbar.

Das Konzept der Orakel-Turingmaschinen ist nützlich zur Klassifikation unentscheidbarer Probleme.

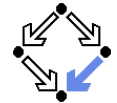
## Orakel-Turingmaschinen und Sprachen



- Eine Sprache  $B$  ist **rekursiv aufzählbar bezüglich**  $A$ :
  - Es gibt eine Orakel-Turingmaschine  $M^A$  mit  $B = L(M^A)$ .
- Eine Sprache  $B$  ist **rekursiv bezüglich**  $A$ :
  - Es gibt eine Orakel-Turingmaschine  $M^A$  mit  $B = L(M^A)$ , deren Berechnungen für jede Eingabe enden.
- Zwei Sprachen sind **äquivalent**:
  - Jede Sprache ist rekursiv bezüglich der anderen.

Äquivalente unentscheidbare Probleme sind also "gleich schwierig" (nicht) zu lösen.

## Orakel für das Emptiness-Problem

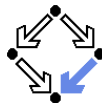


Was wäre, wenn wir ein Orakel für das Emptiness-Problem hätten?

- Nicht jede Sprache ist rekursiv bezüglich  $L_e$ :
  - Es gibt überabzählbar viele Sprachen aber nur abzählbar viele Turing-Maschinen.
  - Also gibt es Probleme, die sich nicht mit einer Orakel-Turingmaschine  $M^{L_e}$  entscheiden lassen.
  - Wir können für solches Problem  $P$  ein Orakel annehmen und damit die Probleme lösen, deren Sprachen rekursiv bezüglich  $L(P)$  sind.
  - Dieser Prozess lässt sich beliebig fortsetzen.

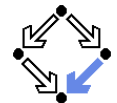
Idee für den Aufbau einer Hierarchie von Orakeln.

## Hierarchie von Orakeln



- Wir können so eine **Hierarchie von Orakeln** konstruieren:
  - $S_0 := \emptyset$
  - $S_1 := \{ \langle M \rangle \mid L(M^{S_0}) = \emptyset \}$
  - $S_2 := \{ \langle M \rangle \mid L(M^{S_1}) = \emptyset \}$
  - ...
  - $S_{i+1} := \{ \langle M \rangle \mid L(M^{S_i}) = \emptyset \}$
  - ...
- $S_0 = \emptyset$ ; das entsprechende Orakel ist trivial.
  - $M^{S_0}$  entspricht einer Turing-Maschine ohne Orakel.
- $S_1 = L_e$ ; das entsprechende Orakel löst das Emptiness-Problem für Turing-Maschinen ohne Orakel.
- Das Orakel für  $S_{i+1}$  löst das Emptiness-Problem für die Orakel-Turingmaschinen  $M^{S_i}$ .
- Wir erhalten damit eine **Hierarchie von Sprachen** über  $\{0, 1\}$ :
  - Entscheidbar mit Orakel für  $S_0$ : rekursive Sprachen.
  - Entscheidbar mit Orakel für  $S_1$ .
  - Entscheidbar mit Orakel für  $S_2$ .
  - ...

## Klassifikation unentscheidbarer Probleme



Man kann einige (nicht alle) unentscheidbare Probleme nach ihrer Äquivalenz zu Elementen der Folge  $S_0, S_1, S_2, \dots$  klassifizieren.

- **Satz:** Das Akzeptierungsproblem  $w \in L(M)$  ist äquivalent zu  $S_1$ .
  - Beweis siehe Skript.
- **Satz:** Das Problem  $L(M) = \Sigma^*$  ist äquivalent zu  $S_2$ .
  - Akzeptiert die Turing-Maschine  $M$  alle Eingaben?
  - Beweis, dass dieses Problem rekursiv bezüglich  $S_2$  ist:
    - Wir konstruieren  $M_3^{S_2}$  mit  $L(M_3^{S_2}) = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$ .
    - $M_3^{S_2}$  konstruiert  $\hat{M}^{S_1}$ , das alle Wörter  $x \in \Sigma^*$  aufzählt und für jedes  $x$  das Orakel  $S_1$  befragt, ob  $x \in L(M)$ .  $\hat{M}^{S_1}$  akzeptiert seine Eingabe, wenn es ein  $x$  mit  $x \notin L(M)$  findet, d.h.
$$L(\hat{M}^{S_1}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{wenn } L(M) = \Sigma^* \\ \Sigma^* & \text{sonst} \end{cases}$$
    - $M_3^{S_2}$  befragt Orakel  $S_2$  ob  $L(\hat{M}^{S_1}) = \emptyset$ . Wenn ja, akzeptiert  $M_3^{S_2}$  seine Eingabe, ansonsten nicht.
  - Beweis, dass  $S_2$  rekursiv bezüglich des Problems ist, siehe Skript.

Manche unentscheidbare Probleme sind also "schwieriger" als andere.