Aufgabe 36. Zeigen Sie, daß die Funktion f, die durch $f(n) = n$-te positive gerade Zahl ($f(0) = 2$, $f(1) = 4$, $f(2) = 6, \dots$) definiert ist, primitiv rekursiv ist.
Benutzen Sie zum Beweis lediglich die Definitionen 1.5.1 bis 1.5.4 aus dem Skriptum analog zu Beispiel 1.5.1.

Aufgabe 37. Sei f die primitiv rekursive Funktion, die durch die Rekursionsgleichungen

$$f(0, y) = 2, \quad f(x+1, y) = f(x, y)^y$$

definiert ist.

1. Berechnen Sie $f(3, 3)$.
2. Kann f auch als Komposition der Grundfunktionen und der Funktionen $(x, y) \mapsto x + y$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, $(x, y) \mapsto x^y$ geschrieben werden?

Aufgabe 38. Beweisen Sie, daß die Funktionen $\lfloor \frac{1}{2} x \rfloor$, $\min(x, y)$ und $\max(x, y)$ primitiv rekursiv sind. (Hinweis: Verwenden Sie bekannte Tatsachen aus der Vorlesung.)

Aufgabe 39. Gegeben sei das Prädikat

$$P(y, x_1, x_2) \equiv x_1 \mid y \wedge x_2 \mid y.$$

Was wird durch die Funktion $\min_y P(y, x_1, x_2)$ berechnet.

Aufgabe 40. Sei eine Funktion f definiert als

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Man kann sich nun folgende Prozedur vorstellen. Man wähle eine positive natürliche Zahl und wende f darauf an. Ist das Ergebnis gleich 1, so stoppe man, anderenfalls, wende man wieder f auf das Ergebnis an und führe das Verfahren solange fort, bis man eine 1 als Ergebnis erhält.
Sei ν eine Funktion, die als Input positive natürliche Zahlen akzeptiert und als Ausgabe die Anzahl der Iterationen ausgibt, die im obigen Verfahren notwendig sind, um als Ergebnis für f eine 1 zu erhalten.
Zeigen Sie dass, ν eine rekursive Funktion ist. Sie können dabei alle Sätze aus dem Skriptum verwenden.
Sehr schwierige Zusatzaufgabe: Ist ν sogar primitiv rekursiv?