

**Aufgabe 31.** Geben Sie eine informale Beschreibung der Arbeitsweise einer Turingmaschine, welche die Funktion  $f(n) = n^2$  berechnet. Wir nehmen dabei an, daß  $n > 0$  auf dem Eingabeband durch  $n$  Einsen gegeben ist. Hinweis: Sie können die Maschine mit mehreren Bändern ausstatten.

**Aufgabe 32.** Geben Sie eine informale Beschreibung der Arbeitsweise einer Turingmaschine, welche die Funktion  $f(n) = 2^n$  berechnet. Wir nehmen dabei an, daß  $n > 0$  auf dem Eingabeband durch  $n$  Einsen gegeben ist. Hinweis: Sie können die Maschine mit mehreren Bändern ausstatten.

**Aufgabe 33.** Geben Sie eine informale Beschreibung der Arbeitsweise einer Turingmaschine an, welche die Eingabezahl  $n > 0$  (auf dem Band gegeben als  $1^n$ ) in ihre Binärdarstellung umwandelt.

**Aufgabe 34.** Eine Turingmaschine wurde definiert als ein 6-tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$$

wobei  $\Sigma \subseteq \Gamma$ ,  $q_0 \in Q$ ,  $F \subseteq Q$  und  $\delta$  eine partielle Funktion  $Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$  ist. Ein Produkt zweier Turingmaschinen  $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, q_{1,0}, F_1, \delta_1)$  und  $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \Gamma_2, q_{2,0}, F_2, \delta_2)$  ist ein 6-tupel

$$M_1 \times M_2 = (Q_1 \times Q_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \Gamma_1 \times \Gamma_2, (q_{1,0}, q_{2,0}), F, \delta_1 \times \delta_2)$$

mit  $F \subseteq Q_1 \times Q_2$ . Für Paare  $(q_1, \gamma_1) \in Q_1 \times \Gamma_1$  und  $(q_2, \gamma_2) \in Q_2 \times \Gamma_2$  im Definitionsbereich von  $\delta_1$  bzw  $\delta_2$  mit  $\delta_i(q_i, \gamma_i) = (p_i, g_i, m_i)$  ( $i = 1, 2$ ) ist

$$\delta_1 \times \delta_2(q_1, q_2, \gamma_1, \gamma_2) = (p_1, p_2, g_1, g_2, m_1, m_2).$$

$M_1 \times M_2$  hat eine natürliche Interpretation als Turingmaschine mit zwei Bändern. Im Falle, dass  $\Sigma_1 = \Sigma_2$ , kann durch passende Wahl der Menge  $F$  der zu akzeptierenden Zustände (und eventuell durch Modifikation von  $M_1$  und  $M_2$ ),  $M_1 \times M_2$  zum Erkennen boolescher Kombinationen von  $L(M_1)$  und  $L(M_2)$  verwendet werden.

In den folgenden Tabellen sind zwei Turingmaschinen  $M_1$  und  $M_2$  mit  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{0, 1\}$  gegeben.

$M_1$	0	1	X	Y	$\sqcup$
$p_0$	$p_1XR$	—	—	$p_3YR$	—
$p_1$	$p_1OR$	$p_2YL$	—	$p_1YR$	—
$p_2$	$p_2OL$	—	$p_0XR$	$p_2YL$	—
$p_3$	—	—	—	$p_3YR$	$p_4 \sqcup R$
$p_4$	—	—	—	—	—

$M_2$	0	1	$\sqcup$
$q_0$	$q_1OR$	$q_21R$	—
$q_1$	—	$q_21R$	$q_3 \sqcup S$
$q_2$	$q_1OR$	—	$q_3 \sqcup S$
$q_3$	—	—	—

Die Endzustände von  $M_1$  bzw.  $M_2$  sind  $p_4$  bzw  $q_3$ .

- Beschreiben Sie die Sprachen  $L(M_1)$  und  $L(M_2)$ .
- Wie ist  $F$  für  $M_1 \times M_2$  festzulegen (und ggf.  $M_1$  und  $M_2$  zu modifizieren), so dass  $L(M'_1 \times M'_2) = L(M_1) \cap L(M_2)$  gilt.
- Wie ist  $F$  für  $M_1 \times M_2$  festzulegen (und ggf.  $M_1$  und  $M_2$  zu modifizieren), so dass  $L(M'_1 \times M'_2) = L(M_1) \cup L(M_2)$  gilt.

**Aufgabe 35.** Konstruieren Sie eine Turingmaschine, welche die folgende Sprache  $L$  erzeugt.  $L$  besteht dabei aus den Wörtern über dem Alphabet  $\{0, 1\}$ , welche einen String  $0^k 1^k$ ,  $k > 0$  als Teilwort enthalten.