**Aufgabe 46.** Sei $M$ eine Turingmaschine, die auf jeder Eingabe stoppt und sei $L$ eine endliche Sprache über dem Alphabet $\{0, 1\}$. Gibt es eine Turingmaschine, die entscheidet, ob $L \subseteq L(M)$ gilt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

**Aufgabe 47.** Sei $N$ eine fix vorgegebene Turingmaschine, die die Sprache $\emptyset \neq L \subsetneq \{0, 1\}^*$ über dem Alphabet $\{0, 1\}$ generiert, d.h. $G(N) = L$. Ist das Problem

Für eine Turingmaschine $M$ gilt $L(M) \cap L \neq \emptyset$.

semi-entscheidbar? Ist es auch entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 48.** Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar?

1. Gilt $L(M_1) = L(M_2)$ für zwei Turingmaschinen $M_1$ und $M_2$?
2. Gilt $L(M_1) \subseteq L(M_2)$ für zwei Turingmaschinen $M_1$ und $M_2$?
3. Gilt $\emptyset \neq L(M_1) \cap L(M_2)$ für zwei Turingmaschinen $M_1$ und $M_2$?
4. Ist das Gleichungssystem $ax = b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ lösbar in $\mathbb{N}$?

Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

**Aufgabe 49.** Seien $L_1$ und $L_2$ zwei Sprachen über dem Alphabet $\Sigma$. Die Verkettung von $L_1$ und $L_2$ ist definiert als

$$L_1 \circ L_2 := \{w \mid \exists u \in L_1 \; \exists v \in L_2 : w = uv\}.$$

Zeigen Sie: Sind $L_1$ und $L_2$ rekursiv aufzählbar, dann ist auch $L_1 \circ L_2$ rekursiv aufzählbar.
Hinweis: Konstruieren Sie eine Turingmaschine für die Sprache $L_1 \circ L_2$.

**Aufgabe 50.** Seien $L_1$ und $L_2$ beliebige Sprachen.

1. Ist $L_1$ unentscheidbar und $L_1 \subseteq L_2$, ist dann $L_2$ notwendigerweise unentscheidbar?
2. Ist $L_1$ entscheidbar und $L_1 \supseteq L_2$, ist dann $L_2$ notwendigerweise entscheidbar?
3. Ist $L_1$ entscheidbar und $L_2$ rekursiv aufzählbar, ist dann notwendigerweise $L_1 \setminus L_2$ rekursiv aufzählbar?

Begründen Sie Ihre Antworten.