# Berechenbarkeit und Komplexität
# Problemkomplexität

Wolfgang Schreiner
Wolfgang.Schreiner@risc.uni-linz.ac.at

Research Institute for Symbolic Computation (RISC)
Johannes Kepler University, Linz, Austria
http://www.risc.uni-linz.ac.at



## Problemkomplexität

Wir betrachten entscheidbare Probleme (rekursive Sprachen) und fragen nach der möglichen Effizienz der Entscheidung (Erkennung).

- Die rekursive Sprache $L$ hat Zeitkomplexität $T(n)$ bzw. Raumkomplexität $S(n)$:
  - Es gibt eine Turing-Maschine mit Zeitkomplexität $T(n)$ bzw. Raumkomplexität $S(n)$, die $L$ erkennt und immer terminiert.
- Die rekursive Sprache $L$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $T(n)$ bzw. nichtdeterministische Raumkomplexität $S(n)$:
  - Es gibt eine nichtdeterm. Turing-Maschine mit Zeitkomplexität $T(n)$ bzw. Raumkomplexität $S(n)$, die $L$ erkennt und immer terminiert.
- DTIME($T(n)$) und DSPACE($S(n)$):
  - Die Familien der Sprachen mit Zeitkomplexität $T(n)$ und Raumkomplexität $S(n)$.
- NTIME($T(n)$) und NSPACE($S(n)$):
  - Die Familien der Sprachen mit nichtdeterministischer Zeitkomplexität $T(n)$ und nichtdeterministischer Raumkomplexität $S(n)$.



## Beispiel

- Sprache $L := \{wcw^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$
  - $w^R$ ...die Umkehrung des Wortes $w$.
- $L$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(n)$ und Raumkomplexität $\mathcal{O}(n)$.
  - Turing-Maschine $M_1$ mit zwei Bändern.
  - Kopiert zunächst den Teil der Eingabe links von $c$ auf zweites Band.
  - Bewegt danach synchron den L/S-Kopf des ersten Bandes nach rechts und den des zweiten Bandes nach links.
  - Die gelesenen Symbole werden verglichen; sind sie gleich und ist ihre Anzahl gleich, akzeptiert $M$ das Wort.
  - Für Eingabe der Länge $n$ werden $n+1$ Schritte benötigt und es wird die maximale Entfernung $n$ vom linken Ende eines Bandes erreicht.



## Komplexitätsklassen

- $\mathcal{P}$ ist die Klasse aller Sprachen, die in deterministischer polynomialer Zeit erkannt werden:
  $\mathcal{P} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{DTIME}(n^i)$
- $\mathcal{NP}$ ist die Klasse aller Sprachen, die in nichtdeterministischer polynomialer Zeit erkannt werden:
  $\mathcal{NP} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{NTIME}(n^i)$
- PSPACE ist die Klasse aller Sprachen, die mit deterministischem polynomialem Raum erkannt werden:
  $\mathrm{PSPACE} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{DSPACE}(n^i)$
- NSPACE ist die Klasse aller Sprachen, die mit nichtdeterministischem polynomialem Raum erkannt werden:
  $\mathrm{NSPACE} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{NSPACE}(n^i)$

## Beispiel

- Das Problem der Hamiltonschen Zyklen:

  *Gibt es im Graphen G einen Zyklus, der jede Ecke genau einmal enthält?*
- Das Problem ist in $\mathcal{NP}$, weil es einen einfachen nichtdeterministischen Algorithmus zur Lösung gibt:
  - Wähle eine Permutation der Ecken des Graphen.
  - Überprüfe, ob die Permutation einen Hamiltonschen Zyklus bildet.
- Die Zeitkomplexität des nichtdeterministischen Algorithmus ist die Zeitkomplexität der Überprüfung der "richtigen" Permutation.
  - Alle Permutationen werden quasi "gleichzeitig" untersucht.
  - Für einen Graphen mit $n$ Knoten hat das Überprüfen jeder Permutation Zeitkomplexität $\mathcal{O}(n)$.

Es ist nicht bekannt, ob das Problem auch in $\mathcal{P}$ ist (wahrscheinlich nicht).



## $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$

- Ein Problem in $\mathcal{NP}$:
  - Algorithmus kann zur Lösung des Problems das Ergebnis "erraten" und einen Algorithmus mit polynomialer Zeitkomplexität zur Überprüfung des Ergebnisses verwenden.
- Ein Problem in $\mathcal{P}$:
  - Algorithmus muss das Ergebnis in polynomialer Zeit konstruieren.
  - Nur Probleme in $\mathcal{P}$ sind "praktisch" lösbar.
- Offensichtlich gilt $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$.
  - Jeder deterministische Algorithmus ist der Spezialfall eines nichtdeterministischen Algorithmus.
- Gilt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$?
  - Höchstwahrscheinlich nicht, das Gegenteil wäre eine Sensation.
  - Aber tatsächlich ist die Antwort unbekannt.

Die Frage $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$? ist das wohl größte ungelöste theoretische Problem der Informatik.



## Wissen über die Komplexitätsklassen

- Satz: $\mathcal{NP} \subseteq$ NSPACE
  - Jedes Problem, das in nicht-deterministisch polynomialer Zeit lösbar ist, ist mit nicht-deterministisch polynomialem Speicher lösbar.
    - Für jede Bewegung des L/S-Kopfes benötigt die Turing-Maschine eine Zeiteinheit; sie kann daher nicht mehr Speicher als Zeit benötigen.
- Satz: NSPACE = PSPACE
  - Jedes Problem, das mit nicht-deterministisch polynomialem Speicher lösbar ist, ist auch mit deterministisch polynomialem Speicher lösbar.
    - Beweis: Savitch, 1970.
- Also gilt: $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP} \subseteq$ PSPACE = NSPACE
  - Es ist unbekannt, ob $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.
  - Es ist unbekannt, ob $\mathcal{NP}$ = PSPACE.



## Polynom-Zeit-Reduktionen

- Die Sprache $L'$ ist Polynom-Zeit-reduzierbar auf Sprache $L$:
  - Es gibt eine Turing-Maschine mit polynomialer Zeitkomplexität, die für jede Eingabe $x$ anhält und eine Ausgabe $y$ erzeugt, sodass $x \in L'$ genau dann wenn $y \in L$.
- Satz: Sei $L'$ Polynom-Zeit-reduzierbar auf $L$. Dann gilt:
  1. $L \in \mathcal{P} \Rightarrow L' \in \mathcal{P}$.
  2. $L \in \mathcal{NP} \Rightarrow L' \in \mathcal{NP}$.

  - Beweis von (1): Sei $L \in \mathcal{P}$. Seien $p_1(n)$ eine polynomiale Zeitschranke für die Reduktion von $L'$ auf $L$ und $p_2(n)$ eine polynomiale Zeitschranke für die Erkennung von $L$. Für gegebenes $x \in L'$ der Länge $n$ berechnet man $y$ in Zeit $p_1(n)$, die Länge von $y$ ist daher auch beschränkt durch $p_1(n)$. Der Test $y \in L$ kann also in Zeit $p_2(p_1(n))$ ausgeführt werden. Für die Entscheidung $x \in L'$ ist daher $p_1(n) + p_2(p_1(n))$ eine polynomiale Zeitschranke.
  - Beweis von (2): analog.

## log-Raum-Reduktionen

- Ein log-Raum Übersetzer:
  - Eine immer haltende Turing-Maschine mit einem Eingabeband (nur zu lesen), einem Ausgabeband (nur zu schreiben), auf dem der LS-Kopf niemals nach links bewegt wird, und einem Arbeitsband, auf dem für eine Eingabe der Länge $n$ nicht mehr als $\log n$ Zellen verwendet werden.
- Die Sprache $L'$ ist log-Raum-reduzierbar auf Sprache $L$:
  - Es gibt einen log-Raum-Übersetzer, der für jede Eingabe $x$ eine Ausgabe $y$ erzeugt, sodass $x \in L'$ genau dann wenn $y \in L$.
- Satz: Sei $L'$ log-Raum-reduzierbar auf $L$. Dann gilt:
  1. $L \in \mathcal{P} \Rightarrow L' \in \mathcal{P}$.
  2. $L \in \text{DSPACE}(\log^k n) \Rightarrow L' \in \text{DSPACE}(\log^k n)$.
  - Beweis von (1): Es genügt zu zeigen, dass die Reduktion von $L'$ auf $L$ nicht mehr als polynomiale Zeit benötigt (siehe letzten Beweis). Das Produkt $P$ aus Anzahl der Zustände, Arbeitsbandinhalte und Positionen der L/S-Köpfe auf Eingabeband und Arbeitsband ist eine Oberschranke für die Anzahl der Rechenschritte: $P = |Q| \cdot |\Gamma|^{\log n} \cdot n \cdot \log n \leq |Q| \cdot n^{\log |\Gamma|} \cdot n \cdot n = |Q| \cdot n^{2+\log |\Gamma|}$



## Vollständige Probleme

Um zeigen, dass $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, sollte man als Kandidaten für ein Element von $\mathcal{NP} \backslash \mathcal{P}$ ein möglichst "schwieriges" Problem in $\mathcal{NP}$ heranziehen.

- Eine Sprache $L$ ist schwierig für eine Klasse $\mathcal{C}$ von Sprachen bezüglich Polynom-Zeit/log-Raum-Reduktion:
  - Jede Sprache in $\mathcal{C}$ ist Polynom-Zeit/log-Raum-reduzierbar auf $L$.
- $L$ ist vollständig für $\mathcal{C}$ bezüglich Polynom-Zeit/log-Raum-Reduktion:
  - $L \in \mathcal{C}$ und $L$ ist schwierig für $\mathcal{C}$ bezüglich P-Zeit/log-Raum-Reduktion.
- $L$ ist $\mathcal{NP}$-vollständig ($\mathcal{NP}$-schwierig):
  - $L$ ist vollständig/schwierig für $\mathcal{NP}$ bezüglich Polynom-Zeit-Reduktion.
- $L$ ist PSPACE-vollständig (PSPACE-schwierig):
  - $L$ ist vollständig/schwierig für PSPACE bezüglich Pol.-Zeit-Reduktion.

Wäre ein einziges $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem in polynomialer Zeit lösbar, wäre $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$; dies ist also höchst unwahrscheinlich.



## Das Erfüllbarkeits-Problem

- Ein Boolescher Ausdruck $E$:
  - $x_1, x_2, \ldots$, T, F, $\neg E_1$, $E_1 \wedge E_2$, $E_1 \vee E_2$.
    - Für Boolesche Ausdrücke $E_1, E_2$.
- Ein Boolescher Ausdruck $E$ ist erfüllbar:
  - Die Variablen in $E$ können so durch die Konstanten T oder F ersetzt werden, dass $E$ den Wert T erhält.
    - $(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_3 \vee x_1)$ ist erfüllbar für $x_1 := T$, $x_2 := F$.
    - $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$ ist nicht erfüllbar.
- Das Erfüllbarkeitsproblem:

  *Ist der Boolesche Ausdruck $E$ erfüllbar?*
- Die Sprache $L_{SAT}$ des Erfüllbarkeitsproblems:
  - $L_{SAT} := \{\text{code}(E) \mid E \text{ ist erfüllbar}\}$
    - $\text{code}(E)$ ... der Text von $E$, wobei jede Variable $x_i$ durch die Binärdarstellung von $i$ ersetzt wurde.
- Satz: $L_{SAT}$ ist $\mathcal{NP}$-vollständig.
  - Beweis (Cook, 1971): siehe Skriptum.

Das bekannteste $\mathcal{NP}$-vollständige Problem.



## Andere $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme

- Das Erfüllbarkeitsproblem für konjunktive Normalformen (CNFs).
  - Boolesche Ausdrücke $(\alpha_{11} \vee \alpha_{12} \vee \ldots) \wedge (\alpha_{21} \vee \alpha_{22} \vee \ldots) \vee \ldots$
    - Jedes $\alpha_{ij}$ eine Konstante, Variable oder negierte Variable.
  - Auch mit nur 3 Literalen pro Klause.
- Das Problem der Hamiltonschen Zyklen.
- Das Problem der linearen Programmierung:

  *Gibt es für ganzzahlige Matrix $A$, Vektoren $c, d$ und Zahl $B$ einen Vektor $x$, sodass $A \cdot x \leq d$ und $c \cdot x \geq B$?*
- Das chromatische Zahlenproblem:

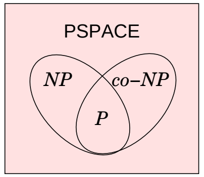
  *Kann Graph $G$ mit $k$ Farben so gefärbt werden, dass keine zwei benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben?*
- Das Problem des Handlungsreisenden:

  *Gibt es in gewichtetem Graphen $G$ einen Hamiltonschen Zyklus mit Gewicht kleiner gleich $k$?*
- Das Partitionierungsproblem:

  *Gibt es zu einer Liste von ganzen Zahlen $i_1, i_2, \ldots, i_k$ eine Unterliste, deren Summe $\frac{1}{2}(i_1 + i_2 + \ldots + i_k)$ ist?*

# Die Komplexitätsklasse co-$\mathcal{NP}$

- co$-\mathcal{NP} := \{L \mid \overline{L} \in \mathcal{NP}\}$
  - Die Klasse derjenigen Sprachen, deren Komplement in $\mathcal{NP}$ ist.
    - Diejenigen Eigenschaften, bei denen die Entscheidung der *Negation* der Eigenschaft nicht-deterministisch polynomiale Zeit benötigt.
- Frage: co-$\mathcal{NP} = \mathcal{NP}$?
  - Antwort ist nicht bekannt.
  - Wenn nein, dann wäre $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.
    - Bekannt: $\mathcal{P} = \{L \mid \overline{L} \in \mathcal{P}\}$, d.h. $\mathcal{P} \subseteq$ co$-\mathcal{NP}$.




- Satz: co-$\mathcal{NP} \neq \mathcal{NP}$ gilt genau dann wenn für alle $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme $S$ gilt, dass $\overline{S} \notin \mathcal{NP}$.
  - Für kein einziges $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem $S$ ist bekannt, ob $\overline{S} \notin \mathcal{NP}$.
    - Erfüllbarkeitsproblem: um die Nicht-Erfüllbarkeit eines Booleschen Ausdrucks zu entscheiden, scheint auch ein nicht-deterministischer Algorithmus mehr als polynomiale (exponentielle) Zeit zu benötigen.

Wahrscheinlich gibt es auch keinen nicht-det.-polynomialen Algorithmus zur Entscheidung der Nicht-Erfüllbarkeit; ansonsten wäre $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.