Aufgabe 31. Man definiere die Funktionen $\varphi_d(x,y) = x^y$, $\varphi_e(x,y) = x \dot{-} 1$, $\varphi_f(x,y) = x \dot{-} y$ und $\varphi_g(x,y) = |x-y|$ (Beispiel 1.5.1 Skriptum) formal durch Komposition und primitive Rekursion, ausgehend von den Grundfunktionen und von Funktionen für die eine solche Darstellung bereits angegeben wurde.

Aufgabe 32. Gegeben sei das Prädikat

$$P(y, x_1, x_2) \equiv y^2 - 10y + x_1 x_2 < 0.$$

Was wird durch die Funktion $f(x_1, x_2) := \min_y P(y, x_1, x_2)$ berechnet? Berechnen Sie die Werte $f(25,0)$, $f(5,5)$ und $f(3,7)$.

Aufgabe 33. Sei eine Funktion f definiert als

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Man kann sich nun folgende Prozedur vorstellen. Man wähle eine positive natürliche Zahl und wende f darauf an. Ist das Ergebnis gleich 1, so stoppe man, anderenfalls, wende man wieder f auf das Ergebnis an und führe das Verfahren solange fort, bis man eine 1 als Ergebnis erhält.
Sei ν eine Funktion, die als Input positive natürliche Zahlen akzeptiert und als Ausgabe die Anzahl der Iterationen ausgibt, die im obigen Verfahren notwendig sind, um als Ergebnis für f eine 1 zu erhalten.
Zeigen Sie dass, ν eine rekursive Funktion ist. Sie können dabei alle Sätze aus dem Skriptum verwenden.
Sehr schwierige Zusatzaufgabe: Ist ν sogar primitiv rekursiv?

Aufgabe 34. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die (partielle) Funktion

$$f(x) = \text{ein solches } y, \text{ so dass } x = y^2$$
$$\text{(undefiniert, wenn kein solches } y \text{ existiert)}$$

1. Stellen Sie diese Funktion mittels der Grundfunktionen, der Komposition, Rekursion und Minimalisierung dar. Dabei dürfen Sie zusätzlich als bekannt voraussetzen, daß die Funktion $m : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x,y) \mapsto x \cdot y$ und das Gleichheitsprädikat $d : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

   $$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y, \\ 0 & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

   primitiv rekursiv sind.
2. Warum kommt man bei dieser Darstellung nicht ohne die Minimalisierung aus?

Aufgabe 35. Es gilt folgender Satz:

Satz 1. Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$g(x) < \operatorname{ack}(c, x)$$

gilt.

Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 1, dass die Ackermannfunktion $\operatorname{ack}(x,y)$ nicht primitiv rekursiv ist. (Hinweis: Setzen Sie $g(x) = \operatorname{ack}(x,x)$.)