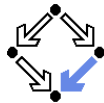


# Berechenbarkeit und Komplexität

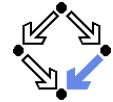
## Komplexität von Algorithmen

Wolfgang Schreiner  
Wolfgang.Schreiner@risc.uni-linz.ac.at

Research Institute for Symbolic Computation (RISC)  
Johannes Kepler University, Linz, Austria  
<http://www.risc.uni-linz.ac.at>



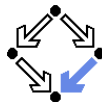
## Komplexitätsmaße



Wie wächst der Aufwand für die Ausführung eines Algorithmus mit wachsender Problemgröße?

- **Problemgröße:**
  - Eigenschaft der Eingabe, die ein Maß für den Aufwand darstellt.
- **Zeitkomplexität** eines Algorithmus:
  - Zeitaufwand als Funktion der Problemgröße.
  - Grenzverhalten: **asymptotische Zeitkomplexität.**
    - Problemgröße gegen unendlich.
- **Raumkomplexität** eines Algorithmus:
  - Speicheraufwand als Funktion der Problemgröße.
  - Grenzverhalten: **asymptotische Raumkomplexität.**
- **worst-case Komplexität:**
  - Maximale Komplexität für alle Eingaben der gegebenen Problemgröße.
- **erwartete Komplexität:**
  - Durchschnittliche Komplexität über alle Eingaben einer Problemgröße.

## Ordnung der Komplexitätsfunktion

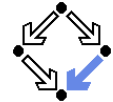


Im allgemeinen ist man nur an der "Größenordnung" einer Komplexitätsfunktion interessiert.

- $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ 
  - "g(n) ist von der Ordnung f(n)"
- $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 
  - g ist eine Komplexitätsfunktion.
  - f beschreibt die "Größenordnung" von g.
- $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}_{>0} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : g(n) \leq c \cdot f(n)$ 
  - Ab einer gewissen Eingabegröße N wächst f mindestens so schnell wie g (d.h. ergibt mit einer gewissen Konstante c multipliziert einen mindestens so großen Wert).

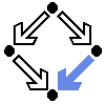
Additive und multiplikative Konstanten spielen bei der Ordnung einer Komplexitätsfunktion keine Rolle.

## Beispiel



- $6n^2 + 7n = \mathcal{O}(n^2)$ 
  - Wir setzen  $c := 7$  und  $N := 7$ .
  - Es gilt für alle  $n \geq 7$ :
$$6n^2 + 7n \leq 6n^2 + n \cdot n = 6n^2 + n^2 = 7n^2$$
- $\log_a n = \mathcal{O}(\log_b n)$  (für alle  $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ )
  - Wir setzen  $c := \log_a b$  und  $N := 0$ .
  - Es gilt für alle  $n \geq 0$ :
$$\log_a n = \log_a b \cdot \log_b n$$
- $2^n + n^2 = \mathcal{O}(2^n)$ 
  - Wir setzen  $c := 2$  und  $N := 4$ .
  - Es gilt für alle  $n \geq 4$ :
$$2^n + n^2 \stackrel{(*)}{\leq} 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n$$
  - Lemma (\*):  $\forall n \geq 4 : n^2 \leq 2^n$ .
    - Induktionsbasis ( $n = 4$ ):  $4^2 = 16 = 2^4$ .
    - Induktionsschritt:  $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + 2n + 2n = n^2 + 4n \leq n^2 + n \cdot n = n^2 + n^2 = 2n^2 \stackrel{Ind.hyp.}{\leq} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ .

## Bedeutung der Asymptotischen Komplexität



Macht die Entwicklung immer schnellerer Computer die Entwicklung asymptotisch schnellerer Algorithmen überflüssig?

- Verschiedene Algorithmen zur Lösung des gleichen Problems:

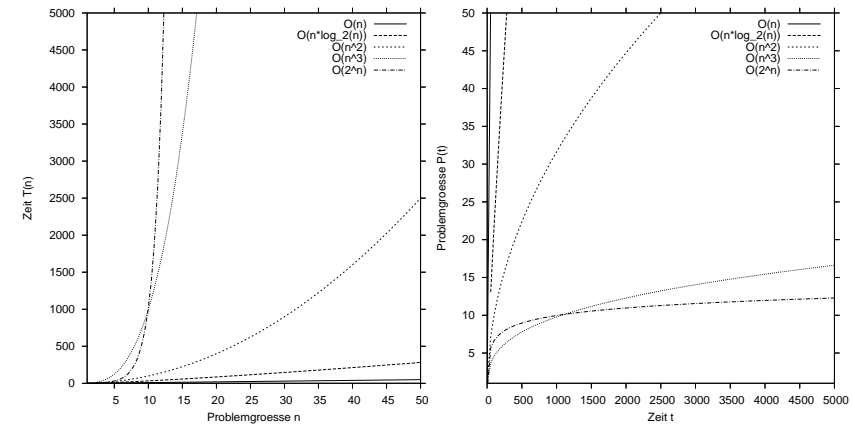
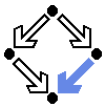
Algorithmus	Zeitkomplexität	Maximale Problemgröße $n$		
		1s	1m	1h
$A_1$	$\mathcal{O}(n)$	1.000	60.000	3.600.000
$A_2$	$\mathcal{O}(n \log n)$	140	4893	250.000
$A_3$	$\mathcal{O}(n^2)$	31	244	1897
$A_4$	$\mathcal{O}(n^3)$	10	39	153
$A_5$	$\mathcal{O}(2^n)$	9	15	21

- 10 mal schnellerer Computer kommt auf den Markt:

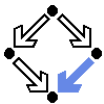
Algorithmus	Zeitkomplexität	Maximale Problemgröße $n$			Zunahme
		1s	1m	1h	
$A_1$	$\mathcal{O}(n)$	10.000	600.000	36.000.000	*10
$A_2$	$\mathcal{O}(n \log_2 n)$	1.003	39.311	1.736.782	*7 ( $\approx$ )
$A_3$	$\mathcal{O}(n^2)$	100	774	6000	*3.16 ( $\sqrt{10}$ )
$A_4$	$\mathcal{O}(n^3)$	21	84	330	*2.15 ( $\sqrt[3]{10}$ )
$A_5$	$\mathcal{O}(2^n)$	13	19	25	+3.3 ( $\log_2 10$ )

Problemgröße wächst nur deutlich bei niedriger Laufzeitkomplexität!

## Bedeutung der Asymptotischen Komplexität



## Multiplikation ganzer Zahlen

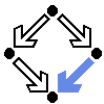


Wie schnell kann man zwei  $n$ -stellige Zahlen  $x$  und  $y$  multiplizieren?

- Klassischer Algorithmus:  $\mathcal{O}(n^2)$ .
  - $n$  Multiplikationen  $r_i \leftarrow x \cdot y_i$  der Komplexität  $\mathcal{O}(n)$ .
    - Jede Multiplikation besteht aus  $n$  Multiplikationen  $x_j \cdot y_i$ .
  - $n - 1$  Additionen  $r_1 + \dots + r_n$  der Komplexität  $\mathcal{O}(n)$ .
    - Jede Addition enthält maximal  $2n$  Additionen zweier Ziffern.
- Karatsuba und Ofman (1962):  $\mathcal{O}(n^{\log_2 3}) \approx \mathcal{O}(n^{1.59})$ 
  - Grundidee: "divide und conquer" Prinzip.
  - Führt die Multiplikation zweier  $n$ -stelliger Zahlen zurück auf drei Multiplikationen zweier  $n/2$ -stelliger Zahlen.

Verbesserung auch von klassischen Algorithmen möglich.

## Karatsuba-Algorithmus



Wir nehmen an, die Anzahl der Stellen  $n$  ist eine Potenz von 2.

Karatsuba( $\downarrow n, \downarrow x, \downarrow y, \uparrow z$ ):

**if**  $n = 1$  **then**

$z \leftarrow x_1 \cdot y_1$

**else**

$a \leftarrow x_{1\dots n/2}; b \leftarrow x_{n/2+1\dots n}$

$c \leftarrow y_{1\dots n/2}; d \leftarrow y_{n/2+1\dots n}$

Karatsuba( $\downarrow n/2, \downarrow a + b, \downarrow c + d, \uparrow u$ )

Karatsuba( $\downarrow n/2, \downarrow a, \downarrow c, \uparrow v$ )

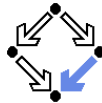
Karatsuba( $\downarrow n/2, \downarrow b, \downarrow d, \uparrow w$ )

$z \leftarrow v \cdot \beta^n + (u - v - w) \cdot \beta^{n/2} + w$

**end** Karatsuba.

Nimmt an, dass die Additionen  $a + b$  und  $c + d$  keinen Übertrag zu  $n + 1$  Stellen ergeben (siehe Skriptum für die Behandlung auch dieses Falls).

## Analyse des Karatsuba-Algorithmus



- **Korrektheit:** sei  $\beta$  die Basis der Zahlendarstellung.

- $x = a \cdot \beta^{n/2} + b$
- $y = c \cdot \beta^{n/2} + d$
- $x \cdot y = (a \cdot \beta^{n/2} + b) \cdot (c \cdot \beta^{n/2} + d)$   
 $= ac \cdot \beta^n + (ad + bc) \cdot \beta^{n/2} + bd$   
 $= ac \cdot \beta^n + ((a + b) \cdot (c + d) - ac - bd) \cdot \beta^{n/2} + bd$   
 $= v \cdot \beta^n + (u - v - w) \cdot \beta^{n/2} + w$

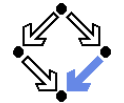
- **Laufzeit:**

$$T(n) = \begin{cases} k, & \text{wenn } n = 1 \\ 3T(n/2) + kn & \text{wenn } n > 1 \end{cases}$$

- $k$  konstanter Faktor.
  - $k$  ... Obergrenze für die Addition im "then"-Zweig.
  - $kn$  ... Obergrenze für Additionen/Verschiebungen im "else"-Zweig.

Lösung der Rekursionsrelation notwendig.

## Analyse des Karatsuba-Algorithmus

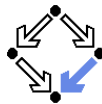


- **Behauptung:**  $T(n) = 3kn^{\log_2 3} - 2kn$ .

- Induktionsbasis  $n = 1$ :  
 $T(1) = k = 3k - 2k = 3k \cdot 1^{\log_2 3} - 2k \cdot 1$ .
- Induktionsschritt  $n = 2\bar{n}$ :  
 $T(2\bar{n}) = 3T(\bar{n}) + 2k\bar{n}$   
 $= 3(3k\bar{n}^{\log_2 3} - 2k\bar{n}) + 2k\bar{n}$   
 $= 3k \cdot 3 \cdot \bar{n}^{\log_2 3} - 6k\bar{n} + 2k\bar{n}$   
 $= 3k \cdot 2^{\log_2 3} \cdot \bar{n}^{\log_2 3} - 4k\bar{n}$   
 $= 3k \cdot (2\bar{n})^{\log_2 3} - 2k \cdot (2\bar{n})$ .

Für die Zeitkomplexität  $T(n)$  des Karatsuba-Algorithmus gilt also  $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 3})$ .

## Lösung linearer Rekursionsrelationen



Wie kommt man zur Lösung der Rekursionsrelation?

- **Satz:** seien  $a, b, n$  natürliche Zahlen. Die Lösung von

$$T(n) = \begin{cases} b, & \text{wenn } n = 1 \\ aT(n/c) + bn & \text{wenn } n > 1 \end{cases}$$

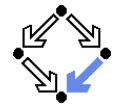
für eine Potenz  $n$  von  $c$  ist

$$T(n) = \begin{cases} \mathcal{O}(n), & \text{wenn } a < c \\ \mathcal{O}(n \log_c n), & \text{wenn } a = c \\ \mathcal{O}(n^{\log_c a}), & \text{wenn } a > c \end{cases}$$

- Beweis: siehe Skriptum.

Nützlich für die Analyse von linearen "divide and conquer" Algorithmen.

## Lineare "divide and conquer"-Algorithmen



$$T(n) = \begin{cases} \mathcal{O}(n), & \text{wenn } a < c \\ \mathcal{O}(n \log_c n), & \text{wenn } a = c \\ \mathcal{O}(n^{\log_c a}), & \text{wenn } a > c \end{cases}$$

- **Lineare "divide und conquer"-Algorithmen:**

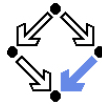
- Problem wird in  $a$  Teilprobleme zerlegt.
- Jedes Teilproblem hat Größe  $n/c$ .
- Aufwand für Zerlegung und Kombination der Teilergebnisse ist linear.

- Beispiel  $c = 2$ : Teile halber Größe.

- $a = 1$  Teil:  $T(n) = \mathcal{O}(n)$ .
- $a = 2$  Teile:  $T(n) = \mathcal{O}(n \log_2 n)$ .
- $a = 3$  Teile:  $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 3})$ .
- $a = 4$  Teile:  $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 4}) = \mathcal{O}(n^2)$ .
- $a = 8$  Teile:  $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 8}) = \mathcal{O}(n^3)$ .

Die Anzahl der Teile geht in die Laufzeitkomplexität logarithmisch ein.

# Komplexität von RAM Programmen



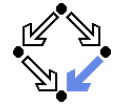
Abhängig von den Kosten, die für die Ausführung einer Instruktion angenommen werden.

- **Uniformes Kostenkriterium:**
  - Jedes Register benötigt eine Raumeinheit.
  - Jede Instruktion benötigt eine Zeiteinheit.
- **Logarithmisches Kostenkriterium:**
  - Anzahl der für ein Register benötigten Speicherzellen ist abhängig von der Länge  $l(n)$  des Inhalts  $n$  des Registers:

$$l(n) := \begin{cases} \lfloor \log |n| \rfloor + 1, & \text{wenn } n \neq 0 \\ 1, & \text{wenn } n = 0 \end{cases}$$

Das uniforme Kostenkriterium ist die Default-Annahme bei der Analyse der Komplexität von RAM-Programmen.

# Logarithmische Komplexität



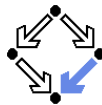
Wir betrachten die Auswirkungen des logarithmischen Kostenkriteriums.

- **Logarithmische Raumkomplexität:**  $\sum l(x_i)$ 
  - Summe über alle verwendeten Register  $i$  (einschließlich Akkumulator).
  - $x_i$  ist dabei die betragsmäßig größte Zahl, die während der Berechnung je in Register  $i$  gespeichert wird.
- **Logarithmische Kosten für Operanden:**
  - Zeit  $t(a)$  für den Zugriff auf den Operanden  $a$ :
 
$$t(=i) := l(i)$$

$$t(i) := l(i) + l(c(i))$$

$$t(*i) := l(i) + l(c(i)) + l(c(c(i)))$$
- **Logarithmische Kosten für Instruktionen:**
  - Zeit für die Ausführung der Instruktion.
  - Annahme: Zeit ist proportional zur Länge des Operanden.

# Logarithmische Komplexität

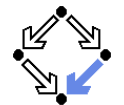


Die logarithmischen Kosten für jede RAM-Instruktion:

Instruktion	Kosten
LOAD $a$	$t(a)$
STORE $i$	$l(c(0)) + l(i)$
STORE $*i$	$l(c(0)) + l(i) + l(c(i))$
ADD $a$	$l(c(0)) + t(a)$
SUB $a$	$l(c(0)) + t(a)$
MULT $a$	$l(c(0)) + t(a)$
DIV $a$	$l(c(0)) + t(a)$
READ $i$	$l(input) + l(i)$
READ $*i$	$l(input) + l(i) + l(c(i))$
WRITE $a$	$t(a)$
JUMP $b$	1
JGTZ $b$	$l(c(0))$
JZERO $b$	$l(c(0))$
HALT	1

Auch Multiplikation und Division gelten als lineare Operationen (?!).

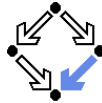
# Beispiel



RAM-Programm für die Funktion  $f(n) = \begin{cases} n^n, & \text{wenn } n > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

<b>read</b> $r_1$	READ	1	Eingabe von $c(1)$
<b>if</b> $r_1 \leq 0$ <b>then</b>	LOAD	1	$c(0) \leftarrow c(1)$
<b>write</b> 0	JGTZ	else	wenn $c(0) > 0$ , else
<b>else</b>	WRITE	=0	Ausgabe von 0
$r_2 \leftarrow r_1$	JUMP	halt	
$r_3 \leftarrow r_1 - 1$	else:	LOAD	1
<b>while</b> $r_3 > 0$ <b>do</b>	STORE	2	$c(0) \leftarrow c(1)$
$r_2 \leftarrow r_2 \cdot r_1$	LOAD	1	$c(2) \leftarrow c(0)$
$r_3 \leftarrow r_3 - 1$	LOAD	1	$c(0) \leftarrow c(1)$
<b>write</b> $r_2$	SUB	=1	$c(0) \leftarrow c(0) - 1$
	STORE	3	$c(3) \leftarrow c(0)$
	JGTZ	body	wenn $c(0) > 0$ , body
	JUMP	done	
	body:	LOAD	2
	MULT	1	$c(0) \leftarrow c(2)$
	STORE	2	$c(0) \leftarrow c(0) \cdot c(1)$
	LOAD	3	$c(2) \leftarrow c(0)$
	LOAD	3	$c(0) \leftarrow c(3)$
	SUB	=1	$c(0) \leftarrow c(0) - 1$
	STORE	3	$c(3) \leftarrow c(0)$
	JUMP	while	
	done:	WRITE	2
	halt:	HALT	Ausgabe von $c(2)$

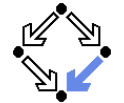
## Beispiel



- **Zeitkomplexität:**
  - Bestimmt durch die Zeitkomplexität der MULT-Instruktionen:
    - Schleife führt  $n - 1$  Iterationen aus.
    - In Iteration  $i$  enthält Akkumulator  $n^i$  und  $r_2$  enthält  $n$ .
  - Uniformes Kostenkriterium:  $(n - 1) \cdot 1 = \mathcal{O}(n)$
  - Logarithmisches Kostenkriterium:  $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ 
    - $i$ -te MULT-Instruktion:  $l(n^i) + l(n) \approx i \cdot \log n + \log n = (i + 1) \log(n)$
    - Alle MULT-Instruktionen:  $\sum_{i=1}^{n-1} (i + 1) \log n = \mathcal{O}(n^2 \log n)$
- **Raumkomplexität:**
  - Inhalt der Register 0 bis 3.
  - Uniformes Kostenkriterium:  $3 = \mathcal{O}(1)$
  - Logarithmisches Kostenkriterium:  $\mathcal{O}(n \log n)$ 
    - $n^n$  ist die größte gespeicherte Zahl.
    - $l(n^n) \approx n \log n$

Das logarithmische Kostenkriterium ist realistischer, wenn die beteiligten Zahlen nicht mehr in eine einzelne Speicherzelle passen.

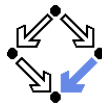
## Beispiel



RAM-Programm, das alle Wörter aus 1en und 2en akzeptiert, die aus gleich vielen 1en wie 2en bestehen.

$r_2 \leftarrow 0$	LOAD	=0	$c(0) = 0$
<b>read</b> $r_1$	STORE	2	$c(2) = c(0)$
	READ	1	Eingabe von $r_1$
<b>while</b> $r_1 \neq 0$ <b>do</b>	LOAD	1	$c(0) \leftarrow c(1)$
	JZERO	done	wenn $c(0) = 0$ , done
<b>if</b> $r_1 \neq 1$	LOAD	1	$c(0) \leftarrow c(1)$
<b>then</b> $r_2 \leftarrow r_2 - 1$	SUB	=1	$c(0) \leftarrow c(0) - 1$
<b>else</b> $r_2 \leftarrow r_2 + 1$	JZERO	one	wenn $c(0) = 0$ , one
<b>read</b> $r_1$	LOAD	2	$c(0) \leftarrow c(2)$
<b>if</b> $r_2 = 0$ <b>then write</b> 1	SUB	=1	$c(0) \leftarrow c(0) - 1$
	STORE	2	$c(2) = c(0)$
	JUMP	read	
	one:	LOAD	2
		ADD	=1
		STORE	2
	read:	READ	1
		JUMP	while
	done:	LOAD	2
		JZERO	write
		HALT	
	write:	WRITE	=1
		HALT	

## Beispiel

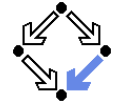


Wort aus  $n$  Zeichen wird gelesen.

- $n$  Iterationen.
- In jeder Iteration Addition von 1 zu einer Zahl kleiner  $n$ .
- Maximaler Absolutbetrag  $n$  aller gespeicherten Zahlen.

	Uniforme Kosten	Logarithmische Kosten
Zeitkomplexität	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n \log n)$
Raumkomplexität	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\log n)$

## Komplexität von RAM/RASP-Simulationen

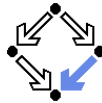


Die folgenden Sätze gelten sowohl für das uniforme als auch für das logarithmische Kostenkriterium.

- **Satz:** Für jedes RAM-Programm mit Zeitkomplexität  $T(n)$  gibt es eine Konstante  $k$  und ein äquivalentes RASP-Programm mit Zeitkomplexität  $kT(n)$ .
  - Beweis: das zum RAM-Programm  $P$  äquivalente RASP-Programm  $P'$  enthält für jede Instruktion von  $P$  maximal 6 Instruktionen. Unter dem uniformen Kostenkriterium ist die Zeitkomplexität von  $P'$  also  $6T(n)$ . Durch Analyse von  $P'$  kann man zeigen, dass für das logarithmische Kostenkriterium die Zeitkomplexität von  $P'$  gleich  $(6 + 11 \cdot l(r)) \cdot T(n)$  ist ( $r$  ist der bei der Simulation angenommene Verschiebungsfaktor).
- **Satz:** Für jedes RASP-Programm mit Zeitkomplexität  $T(n)$  gibt es eine Konstante  $k$  und ein äquivalentes RAM-Programm mit Zeitkomplexität  $kT(n)$ .

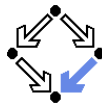
Die Simulation von RAM durch RASP und umgekehrt kostet nur einen konstanten Zeitfaktor.

## Komplexität von Turing-Maschinen



- Die (**worst-case**) **Zeitkomplexität**  $T(n)$  einer Turing-Maschine  $M$ :
  - $T(n)$  ist die maximale Anzahl der Übergänge zu einer neuen Konfiguration bei einer Berechnung, die mit einem beliebigen Eingabewort der Länge  $n$  beginnt.
    - Terminiert die Berechnung für ein Eingabewort der Länge  $n$  nicht, ist  $T(n)$  undefiniert.
- Die (**worst-case**) **Raumkomplexität**  $S(n)$  einer Turing-Maschine  $M$ :
  - $S(n)$  ist die maximale Distanz, die sich einer der L/S-Köpfe während einer Berechnung, die mit einem beliebiges Eingabewort der Länge  $n$  beginnt, vom linken Bandende entfernt.
    - Gibt es ein Eingabewort der Länge  $n$ , für das sich der L/S-Kopf unbegrenzt nach rechts bewegt, ist  $S(n)$  undefiniert.
- Die **Zeit/Raumkomplexität einer nicht-deterministischen T.-M.**  $M$ :
  - Die maximale Zeit/Raumkomplexität, die  $M$  für eine Eingabe der Länge  $n$  (für eine beliebige Folge von nichtdeterministischen Wahlen) erreichen kann.

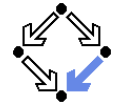
## Komplexität von RAM/RASP-Simulationen



- Zwei Funktionen  $f_1, f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sind in **polynomialer Relation**:
  - Es gibt Polynome  $p_1(x)$  und  $p_2(x)$  mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:
 
$$f_1(n) \leq p_1(f_2(n)) \text{ und } f_2(n) \leq p_2(f_1(n))$$
- Beispiele:
  - $2n^2$  und  $n^5$  sind in polynomialer Relation.
    - $p_1(x) = 2x, p_2(x) = x^3$ .
    - $2n^2 \leq 2n^5$  und  $n^5 \leq (2n^2)^3$
  - $a^n$  und  $b^n$  sind in polynomialer Relation (für  $a, b > 1$ ):
    - $p(x) = x^{\lceil \log_b a \rceil}$ .
    - $a^n = (b^{\log_b a})^n = (b^n)^{\log_b a} \leq p(b^n)$
  - $n^2$  und  $2^n$  sind nicht in polnomialer Relation:
    - Es gibt kein Polynom  $p(x)$  sodass  $p(n^2) \geq 2^n$ , für alle  $n$ .

Kriterium, dass sich zwei Funktionen nicht mehr als um eine "polynomiale Transformation" voneinander unterscheiden.

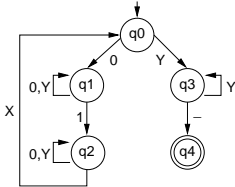
## Beispiel



$M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$  zur Erkennung der Wörter  $0^m 1^m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ).

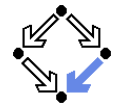
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \Sigma = \{0, 1\}, \Gamma = \{\sqcup, 0, 1, X, Y\}, F = \{q_4\}$

$\delta$	$\sqcup$	0	1	X	Y
$q_0$	—	$(q_1, X, R)$	—	—	$(q_3, Y, R)$
$q_1$	—	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, Y, L)$	—	$(q_1, Y, R)$
$q_2$	—	$(q_2, 0, L)$	—	$(q_0, X, R)$	$(q_2, Y, L)$
$q_3$	$(q_4, \sqcup, R)$	—	—	—	$(q_3, Y, R)$
$q_4$	—	—	—	—	—



- $T(n) = \mathcal{O}(n^2)$  (für Eingabewort  $w$  der Länge  $n$ ):
  - Hauptschleife wird höchstens  $(n + 1)/2$  mal durchlaufen.
    - Ersetzt in jedem Durchlauf zwei Symbole von  $w$  durch  $X$  und  $Y$ .
  - Jeder Schleifendurchlauf:  $2n + 2$  Schritte.
    - $n + 1$  Schritte für die Suche nach rechts,  $n$  Schritte für die Suche nach links, 1 Schritt für die Bewegung zum nächsten Symbol.
  - Schlussbehandlung:  $n$  Schritte.
    - In Summe  $(2n + 2) \cdot (n + 1)/2 + n = (n + 1)^2 + n$  Schritte.
- $S(n) = \mathcal{O}(n)$ :
  - L/S-Kopf bewegt sich höchstens über eine Position von  $w$  hinaus.

## Komplexität von RAM/RASP-Simulationen



- Satz:** Das RAM/RASP Modell unter dem logarithmischen Kostenkriterium und das Turing-Maschinen-Modell sind in polnomialer Relation.
  - Zu jeder RAM/RASP  $R$  gibt es eine Turing-Maschine  $M$ , sodass die Komplexitätsfunktionen von  $R$  und  $M$  in polynomialer Relation stehen, und umgekehrt.
- Uniformes Kostenkriterium: jede Turing-Maschine mit Komplexität  $\mathcal{O}(T(n))$  wird durch RAM mit Komplexität  $\mathcal{O}(T^2(n))$  simuliert.
  - Umgekehrung gilt nicht: RAM kann durch iteratives Quadrieren in  $\mathcal{O}(n)$  Schritten die Zahl  $2^{2^n}$  berechnen ( $2^{2^n} = (2^{2^{n-1}})^2$ ).
  - Turing-Maschine braucht  $2^n$  Zellen, nur um diese Zahl zu speichern.
    - RAM benötigt dafür nur 1 Register.

Unter dem logarithmischen Kostenkriterium unterscheidet sich die Komplexität von RAM und Turing-Maschine "nicht essentiell".